SESUAI KURIKULUM TERBARU

Surya A. Pratama

STRATEGI KEBUT SEMALAM

Matematika SMA

KELAS X, XI, & XII

SIAP & SUKSES Ujian dalam Semalam

- Intisari Materi yang Sering Keluar Ulangan
- Rumus Praktis dan Super Lengkap
- Trik Cerdik dan Cepat Selesaikan Soal:
  - Ulangan Harian
  - Ujian Nasional
  - Ulangan Semester
  - Ujian Masuk PTN

PLUS!

- Soal-Soal Ujian Nasional
- Soal-Soal Ujian Masuk PTN
- Disertai Pembahasan + Kunci Jawaban Akurat

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA Kelas X, XI, dan XII

Oleh: Surya A Pratama

Penyunting: Fina
Pemeriksa Aksara: Rudy
Desain Sampul: Gunawan

Penerbit:
CAKRAWALA
Jl. Cempaka Putih No. 8
Deresan CT X, Gejayan
Yogyakarta 55283
Telp (0274) 555939, 556043
Faks (0274) 546020
Email: cakrawalasketsa@yahoo.co.id

Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Surya A Pratama
Strategi Kebut Semalam Matematika SMA Kelas X, XI, dan XII/Penyunting: Fina - cet. 1- Yogyakarta: Penerbit Cakrawala, 2014, viii + 248 hlm; 11 x 18 cm

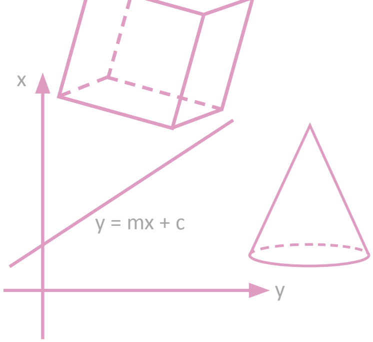
ISBN (10) 979-383-260-6
ISBN (13) 978-979-383-260-9

Cetakan Pertama, 2014

Daftar Isi

Bab 1

Pangkat, Akar, dan Logaritma



A. Bentuk Pangkat dan Akar

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n faktor}}$$

dengan:
a = bilangan pokok (basis)
n = pangkat atau eksponen

Sifat-Sifat Bilangan dengan Pangkat
Misalkan m, n, dan p adalah bilangan bulat positif, $a, b \in R$, maka:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$ dan $m > n$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $(a^m b^n)^p = a^{mp} b^{np}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}, a \neq 0$

Bentuk Akar
Sifat-sifat Bentuk Akar

- $\sqrt[n]{a^n} = a$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Merasionalkan penyebut

1. Bentuk $\frac{1}{\sqrt{a}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a}\sqrt{a}$$

2. Bentuk $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{a-b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

3. Bentuk $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

B. Logaritma

$${}^{a}\log b = c \Leftrightarrow a^{c} = b$$

a = bilangan pokok; $0 < a < 1$ atau $a > 1$ dan $a \neq 1$
b = numerus; $b > 0$
c = hasil logaritma

Rumus-rumus Logaritma

Dalam logaritma berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

- ${}^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log bc$
- ${}^{a}\log b - {}^{a}\log c = {}^{a}\log \frac{b}{c}$
- ${}^{a^{n}}\log b^{m} = \frac{m}{n} \cdot {}^{a}\log b$

- $^{a}\log b = \dfrac{^{p}\log b}{^{p}\log a}$ dengan $0 < p < 1$ atau $p > 1$
- $^{a}\log b = \dfrac{1}{^{b}\log a}$
- $a^{^{a}\log b} = b$
- $^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log d = {}^{a}\log d$
- $^{a}\log a = 1$
- $^{a}\log 1 = 0$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2008)**
Bentuk $3\sqrt{24} + 2\sqrt{3}\left(\sqrt{32} - 2\sqrt{18}\right)$ dapat disederhanakan menjadi ...
(A) $\sqrt{6}$ (C) $4\sqrt{6}$ (E) $9\sqrt{6}$
(B) $2\sqrt{6}$ (D) $6\sqrt{6}$

Pembahasan: Kunci (B)

$$\begin{aligned}
3\sqrt{24} + 2\sqrt{3}\left(\sqrt{32} - 2\sqrt{18}\right) &= 3\sqrt{4\cdot 6} + 2\sqrt{3}\left(\sqrt{16\cdot 2} - 2\sqrt{9\cdot 2}\right)\\
&= 3\cdot 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\left(4\sqrt{2} - 2\cdot 3\sqrt{2}\right)\\
&= 6\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\left(4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right)\\
&= 6\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\cdot(-2\sqrt{2})\\
&= 6\sqrt{6} - 4\sqrt{6}\\
&= 2\sqrt{6}
\end{aligned}$$

2. **(UM UGM 2008)**

$$\frac{\left(\sqrt[6]{x^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x+1}}\right)}{x\sqrt[6]{x+1}} = \ldots$$

(A) $x\sqrt{x+1}$ (C) 1 (E) $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

(B) $\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}$ (D) x

Pembahasan: Kunci (C)

$$\frac{(\sqrt[6]{x^2})(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x+1}})}{x\sqrt[6]{x+1}} = \frac{x^{2/6}\cdot x^{2/3}\cdot (x+1)^{1/6}}{x\cdot (x+1)^{1/6}} = \frac{x^1}{x} = 1$$

3. Bentuk sederhana dari $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ adalah ...

(A) $\frac{1}{3}(\sqrt{6}-4\sqrt{3})$ (D) $\frac{1}{3}(4\sqrt{3}-\sqrt{6})$

(B) $\frac{1}{3}(\sqrt{6}-2\sqrt{3})$ (E) $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$

(C) $\frac{1}{9}(\sqrt{3}-\sqrt{6})$

Pembahasan: Kunci (E)

Dengan merasionalkan penyebut, diperoleh:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$$

4. Diketahui ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, maka ${}^{15}\log 20 =$ ...

(A) $\frac{2}{a}$ (C) $\frac{a}{2}$ (E) $\frac{a(1+b)}{2+ab}$

(B) $\frac{2+ab}{a(1+b)}$ (D) $\frac{b+1}{2ab+1}$

Pembahasan: Kunci (B)

$$
\begin{aligned}
{}^{15}\log 20 &= \frac{{}^{2}\log 20}{{}^{2}\log 15} = \frac{{}^{2}\log\left(2^2.5\right)}{{}^{2}\log\left(3.5\right)} \\
&= \frac{2\cdot{}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 5}{{}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 5} = \frac{2\cdot{}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 3\cdot{}^{3}\log 5}{{}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 5} \\
&= \frac{2\cdot 1 + a\cdot b}{a + a\cdot b} = \frac{2+ab}{a(1+b)}
\end{aligned}
$$

5. **(UM UGM 2006)**

Nilai dari ${}^{\frac{1}{k}}\log(m^2)\cdot{}^{\frac{1}{m}}\log(n^2)\cdot{}^{\frac{1}{n}}\log(k^2)$ adalah ...

(A) 4 (C) 8 (E) 1

(B) -4 (D) -8

Pembahasan: Kunci (D)

Gunakan sifat

$$
{}^{a^n}\log b^m = \frac{m}{n}\cdot{}^{a}\log b \text{ dan } {}^{a}\log b\cdot{}^{b}\log c\cdot{}^{c}\log d = {}^{a}\log d
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{\frac{1}{k}}\log(m^2)\cdot{}^{\frac{1}{m}}\log(n^2)\cdot{}^{\frac{1}{n}}\log(k^2) \\
&= {}^{k^{-1}}\log(m^2)\cdot{}^{m^{-1}}\log(n^2)\cdot{}^{n^{-1}}\log(k^2) \\
&= \frac{2}{-1}\cdot{}^{k}\log m\cdot\frac{2}{-1}\cdot{}^{m}\log n\cdot\frac{2}{-1}\cdot{}^{n}\log k \\
&= (-2)(-2)(-2)\cdot{}^{k}\log m\cdot{}^{m}\log n\cdot{}^{n}\log k \\
&= (-8)\cdot{}^{k}\log k = -8
\end{aligned}
$$

6. Jika ${}^{7}\log 2 = a$ dan ${}^{2}\log 3 = b$, maka ${}^{6}\log 98$ = ...

(A) $\dfrac{a}{a+b}$ (C) $\dfrac{a+2}{a(b+1)}$ (E) $\dfrac{a+2}{b(a+1)}$

(B) $\dfrac{a+2}{b+1}$ (D) $\dfrac{a+2}{b+2}$

Pembahasan: Kunci (C)

$${}^{6}\log 98 = \frac{{}^{2}\log 98}{{}^{2}\log 6} = \frac{{}^{2}\log 2.49}{{}^{2}\log 2.3} = \frac{{}^{2}\log 2.7^{2}}{{}^{2}\log 2.3}$$

$$= \frac{{}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 7^{2}}{{}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 3}$$

$$= \frac{1 + 2\,{}^{2}\log 7}{1 + {}^{2}\log 3} \longrightarrow \boxed{{}^{7}\log 2 = a \Rightarrow {}^{2}\log 7 = \frac{1}{a}}$$

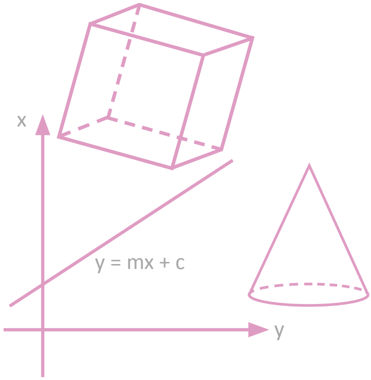
$$= \frac{1 + 2\left(\frac{1}{a}\right)}{1+b} = \frac{1 + \frac{2}{a}}{1+b} = \frac{\frac{a+2}{a}}{1+b} = \frac{a+2}{a(1+b)}$$

Bab 2

Persamaan Kuadrat

Strategi Kebut Semalam

Matematika **SMA**



A. Bentuk Umum

Persamaan kuadrat mempunyai bentuk umum:

$ax^2 + bx + c = 0$

Dengan a, b, c konstanta bilangan real dan $a \neq 0$.

B. Metode Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat, digunakan metode:

1. Faktorisasi
2. Kuadrat sempurna
3. Rumus ABC

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 8 = 0$!

- Faktorisasi

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$
$$(x+2)(x+4) = 0$$
$$(x+2) = 0 \quad \text{atau} \quad (x+4) = 0$$
$$x = -2 \quad \text{atau} \quad x = -4$$

HP = {–2, –4}

- Kuadrat sempurna

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$
$$x^2 + 6x + 8 + 1 - 1 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 = 1$$
$$(x+3)^2 = 1$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{1}$$
$$x + 3 = 1 \quad \text{atau} \quad x + 3 = -1$$
$$x = -2 \quad \text{atau} \quad x = -4$$

HP = {–2, –4}

- Rumus ABC

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+2}{2} \text{ atau } x_2 = \frac{-6-2}{2}$$

$$x_1 = -2 \text{ atau } x_2 = -4$$

HP = {–2, –4}

C. Jenis-jenis Akar Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai:

1. Akar real jika $D \geq 0$
2. Akar real berlainan jika $D > 0$, dalam hal ini $x_1 \neq x_2$
3. Akar real kembar jika $D = 0$, dalam hal ini $x_1 = x_2$
4. Akar imajiner/khayal jika $D < 0$

Dengan $D = b^2 - 4ac$

D. Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c konstanta dan $a \neq 0$, maka berlaku:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ ;\ x_1.x_2 = \frac{c}{a};$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a} \text{ dengan } x_1 > x_2$$

Rumus-rumus yang berkaitan dengan persamaan kuadrat:

$$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2$$

$$x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2(x_1 + x_2)$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2}$$

E. Sifat-sifat Akar Persamaan Kuadrat

Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c konstanta dan $a \neq 0$. Hubungan jumlah, hasil kali akar-akar, dan diskriminan dapat digunakan untuk mengetahui sifat akar-akar persamaan kuadrat, yaitu:

- x_1 dan x_2 positif, jika

$$x_1 + x_2 > 0$$
$$x_1 \cdot x_2 > 0$$
$$D \geq 0$$

- x_1 dan x_2 negatif, jika

$$x_1 + x_2 < 0$$
$$x_1 \cdot x_2 > 0$$
$$D \geq 0$$

- x_1 dan x_2 berlainan tanda, jika

$$x_1 \cdot x_2 < 0$$
$$D > 0$$

- x_1 dan x_2 berlawanan, jika
$$x_1 + x_2 = 0$$
- x_1 dan x_2 berkebalikan, jika
$$x_1 \cdot x_2 = 1$$

F. Menentukan Persamaan Kuadrat Baru

Persamaan kuadrat baru yang mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 adalah:
$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2 = 0$$

Soal dan Pembahasan

1. **(SPMB 2007)**
   Persamaan kuadrat $4x^2 + p = -1$ mempunyai akar x_1 dan x_2. Jika $x_1 = \frac{1}{2}$, maka $p.(x_1^2 + x_2^2) = ...$

   (A) $-1\frac{1}{2}$ (C) -1 (E) $-\frac{1}{4}$

   (B) $-1\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$

   Pembahasan: Kunci (C)
   $4x^2 + p = -1 \Leftrightarrow 4x^2 + (p + 1) = 0$
   Dari persamaan kuadrat tersebut, diperoleh:
   a = 4, b = 0, dan c = p + 1
   Diketahui x_1 dan x_2 akar-akar dari
   $4x^2 + (p + 1) = 0$ dan $x_1 = \frac{1}{2}$, maka:

   $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{0}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{p+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} = \frac{p+1}{4}$$

$\Leftrightarrow$ p + 1 = -1

$\Leftrightarrow$ p = -2

Sehingga

$$p\,(x_1^2 + x_2^2) = -2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -1$$

2. **(UNAS 2009)**

Akar-akar persamaan $x^2 + (2a-3)x + 18 = 0$ adalah p dan q. Jika p = 2q, untuk p > 0, q > 0. Nilai a – 1 = ...

(A) – 5 (C) 2 (E) 4

(B) – 4 (D) 3

Pembahasan: Kunci (C)

Diketahui p = 2q

Dari persmaan kuadrat $x^2 + (2a-3)x + 18 = 0$ diperoleh:

A = 1, B = 2a – 3, C = 18

Dengan menggunakan rumus jumlah dan kali akar-akar persamaan kuadrat, diperoleh:

$$p \cdot q = \frac{C}{A}$$
$$\Leftrightarrow 2q \cdot q = \frac{18}{1}$$
$$\Leftrightarrow 2q^2 = 18$$
$$\Leftrightarrow q^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow q = \pm 3$$

Karena diketahui q > 0, maka nilai q yang memenuhi adalah q = 3

$$p + q = \frac{-B}{A}$$
$$\Leftrightarrow 2q + q = \frac{-(2a-3)}{1}$$
$$\Leftrightarrow 3q = 2a + 3$$
$$\Leftrightarrow 3 \cdot 3 - 3 = 2a$$
$$\Leftrightarrow 6 = 2a$$
$$\Leftrightarrow a = 3$$

Jadi, a – 1 = 3 – 1 = 2

3. **(UM UGM 2009)**
   Diketahui x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $6x^2 - 5x + 2m - 5 = 0$. Jika $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$, maka nilai m adalah ...

   (A) –1 (C) 1 (E) 3
   (B) 0 (D) 2

   Pembahasan: Kunci (E)
   Diketahui: $6x^2 - 5x + 2m - 5 = 0$. Diperoleh:
   a = 6, b = –5, c = 2m – 5

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{5}{6} \quad \text{dan} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m-5}{6}$$

Substitusikan nilai-nilai tersebut pada persamaan $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 5 \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{6}}{\frac{2m-5}{6}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2m-5} = 5 \Leftrightarrow 5 = 10m - 25$$

$$\Leftrightarrow 30 = 10m \Leftrightarrow m = 3$$

4. **(SNMPTN 2009)**
Jika kedua akar persamaan $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$ saling berlawanan tanda, tetapi mempunyai nilai mutlak yang sama, maka nilai m sama dengan ...

(A) $\frac{a+b}{a-b}$ (C) $\frac{a-b}{a+b}$ (E) 1

(B) c (D) $\frac{1}{c}$

Pembahasan: Kunci (C)

Ubah bentuk $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$

$$\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(x^2 - bx) = (m - 1)(ax - c$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - (m+1)bx = (m-1)ax - (m-1)c$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - mbx - bx - max + ax + (m-1)c = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - (m(a+b) + (b-a))x + (m-1)c = 0$$

Diperoleh: a = m + 1 dan b = m(a + b) + (b – a)

Akar berlawanan tanda dan mempunyai nilai mutlak yang sama artinya

$x_1 = -x_2$ atau $x_1 + x_2 = 0$.

$\Rightarrow \frac{-B}{A} = 0$

$\Rightarrow -B = 0$

$\Rightarrow m(a + b) + b - a = 0$

$\Rightarrow m(a + b) = a - b$

$\Rightarrow m = \frac{(a - b)}{a + b}$

5. **(UNAS 2009)**

Persamaan kuadrat $3x^2 + 6x - 1 = 0$ mempunyai akar α dan β. Persamaan kuadrat baru yang akarnya $(1 - 2\alpha)$ dan $(1 - 2\beta)$ adalah ...

(A) $3x^2 - 18x - 37 = 0$

(B) $3x^2 - 18x + 13 = 0$

(C) $3x^2 - 18x + 11 = 0$

(D) $x^2 - 6x - 37 = 0$

(E) $x^2 - 6x + 11 = 0$

Pembahasan: Kunci (-)

Persamaan kuadrat baru yang mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 adalah:

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$

Dari soal diketahui: $x_1 = \alpha$ dan $x_2 = \beta$.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= (1-2\alpha) + (1-2\beta) \\
&= 2 - 2(\alpha+\beta) \\
&= 2 - 2\left(\frac{-B}{A}\right) \\
&= 2 - 2\left(\frac{-6}{3}\right) \\
&= 2 - 2(-2) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= (1-2\alpha)(1-2\beta) \\
&= 1 - 2\alpha - 2\beta + 4\alpha\beta \\
&= 1 - 2(\alpha+\beta) + 4\alpha\beta \\
&= 1 - 2\left(\frac{-B}{A}\right) + 4\left(\frac{C}{A}\right) \\
&= 2 - 2\left(\frac{-6}{3}\right) + 4\left(\frac{-1}{3}\right) \\
&= 2 - 2(-2) - \frac{4}{3} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

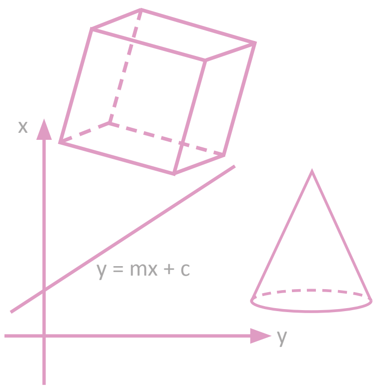
Sehingga diperoleh persamaan kuadrat baru:

$$
\begin{aligned}
x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 &= 0 \\
x^2 - 6x + \frac{14}{3} &= 0 \\
3x^2 - 18x + 14 &= 0
\end{aligned}
$$

Bab 3

Fungsi Kuadrat

Strategi Kebut Semalam
Matematika SMA



Fungsi f yang didefinisikan sebagai:

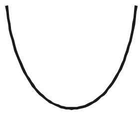
$f(x) = ax^2 + bx + c$

dengan a, b, c konstanta bilangan real dan $a \neq 0$ didefinisikan sebagai fungsi kuadrat.

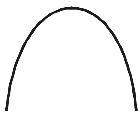
A. Hubungan a, b, c, dan d dalam Menentukan Grafik Fungsi Kuadrat

Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0$. D adalah diskriminan dengan rumus: $D = b^2 - 4ac$

1. Nilai "a" menentukan keterbukaan kurva
   - $a > 0 \Rightarrow$ parabola terbuka ke atas

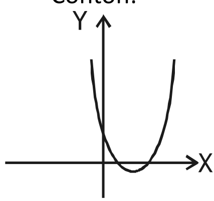


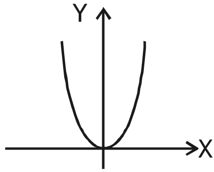
   - $a < 0 \Rightarrow$ parabola terbuka ke bawah

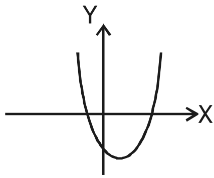


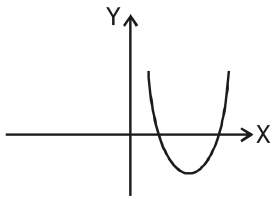
2. Nilai "c" menentukan titik potong dengan sumbu y
   - $c > 0 \Rightarrow$ parabola memotong sumbu y positif

     Contoh:

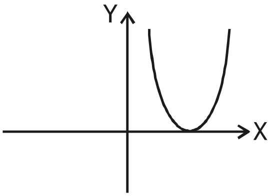


- $c = 0 \Rightarrow$ parabola memotong sumbu y di (0,0)
  Contoh:
  

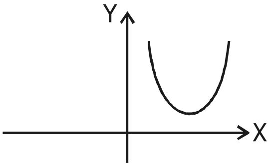
- $c < 0 \Rightarrow$ parabola memotong sumbu y negatif
  Contoh:
  

3. "D" menentukan titik potong dengan sumbu x
   - $D > 0 \Rightarrow$ parabola memotong sumbu x di dua titik
     Contoh:
     

   - $D = 0 \Rightarrow$ parabola menyinggung sumbu x
     Contoh:



- $D < 0 \Rightarrow$ parabola tidak memotong sumbu x
  Contoh:



B. Menentukan Titik Ekstrem Fungsi Kuadrat

Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0$.

- Sumbu simetri: $x = \frac{-b}{2a}$
- Nilai ekstrem: $y = \frac{D}{-4a} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$
- Titik puncak: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$

  Jika a > 0, maka titik ekstrem akan mencapai minimum.
  Jika a < 0, maka titik ekstrem akan mencapai maksimum.

C. Membentuk Persamaan Fungsi Kuadrat

1. Jika diketahui tiga titik pada parabola:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

2. Jika diketahui titik puncak (x_p, y_p) dan titik lain:

$$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

3. Jika diketahui titik potong dengan sumbu X, yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ serta titik lain:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

D. Definit

1. Definit positif

Suatu fungsi kuadrat yang selalu bernilai positif untuk semua x disebut **definit positif**, artinya grafik fungsi kuadrat, sepenuhnya berada di atas sumbu X.

Syarat: D < 0 dan a > o

2. Definit Negatif

Suatu fungsi kuadrat yang selalu bernilai negatif untuk semua x disebut **definit negatif**, artinya grafik fungsi kuadrat, sepenuhnya berada di bawah sumbu X.

Syarat: D < 0 dan a < 0

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2008)**

   Persamaan grafik fungsi kuadrat yang mempunyai titik balik minimum (1,2) dan melalui titik (2,3) adalah ...

   (A) $y = x^2 - 2x + 1$
   (B) $y = x^2 - 2x + 3$
   (C) $y = x^2 + 2x - 1$
   (D) $y = x^2 + 2x + 1$
   (E) $y = x^2 - 2x - 3$

   Pembahasan: Kunci (B)

   Ingat! Persamaan kuadrat baru jika diketahui titik puncak (x_p, y_p) dan titik lain adalah:

   $$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

   Dengan demikian, persamaan grafik fungsi kuadrat dengan titik balik minimum (1,2) adalah

   $y = a(x - 1)^2 + 2$

   Grafik melalui (2,3), maka:

   $$\begin{aligned} f(2) &= 3 \\ a(2-1)^2 + 2 &= 3 \\ a + 2 &= 3 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

   Jadi, fungsi kuadrat tersebut adalah:

   $$\begin{aligned} y &= 1(x-1)^2 + 2 \\ &= (x^2 - 2x + 1) + 2 \\ &= x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

2. **(UNAS 2009)**
Jika m > 0 dan grafik $f(x) = x^2 - mx + 5$ menyinggung garis y = 2x + 1, maka nilai m = ...
(A) – 6 (C) 6 (E) 8
(B) – 2 (D) 2

Pembahasan: Kunci (D)

Substitusikan y = 2x + 1 ke dalam $f(x) = x^2 - mx + 5$, diperoleh:

$$2x + 1 = x^2 - mx + 5$$
$$2x + 1 - (x^2 - mx + 5) = 0$$
$$2x + 1 - x^2 + mx - 5 = 0$$
$$-x^2 + mx + 2x - 4 = 0$$
$$-x^2 + (m+2)x - 4 = 0$$
$$x^2 - (m+2)x + 4 = 0$$

Dari persamaan kuadrat $x^2 - (m + 2)x + 4 = 0$, didapatkan:
a = 1, b = – (m + 2), c = 4.
$f(x) = x^2 - mx + 5$ menyinggung y = 2x + 1, berarti D = 0.
Jadi,

$$D = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$\left(-(m+2)\right)^2 - 4.1.4 = 0$$
$$m^2 + 4m + 4 - 16 = 0$$
$$m^2 + 4m - 12 = 0$$
$$(m+6)(m-2) = 0$$
$$m = -6 \text{ atau } m = 2$$

Karena m > 0, maka nilai m yang mungkin adalah m = 2.

3. Apabila grafik fungsi kuadrat $y = kx^2 + (k-3)x - 4$ seluruhnya di bawah sumbu x, maka nilai k tidak mungkin...
   (A) -10 (C) -7 (E) -3
   (B) -8 (D) -6

Pembahasan: Kunci (A)

Fungsi kuadrat $y = kx^2 + (k-3)x - 4$ seluruhnya di bawah sumbu x sehingga memenuhi definit negatif.

Syarat definit negatif, antara lain:

(i) a < 0 maka k < 0

(ii) D < 0

$$\Leftrightarrow (k-3)^2 + 16k < 0$$

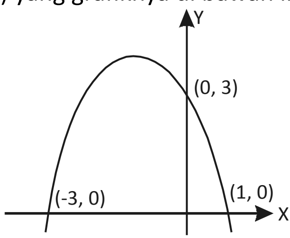
$$\Leftrightarrow k^2 + 10k + 9 < 0$$

$$\Leftrightarrow (k+9)(k+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow -9 < k < -1$$

Sehingga nilai k yang tidak mungkin adalah -10

4. Fungsi f(x) yang grafiknya di bawah ini adalah...



   (A) $y = -x^2 - 2x + 3$ (D) $y = x^2 - 2x - 3$
   (B) $y = x^2 - 2x + 3$ (E) $y = -x^2 - 2x - 3$
   (C) $y = -x^2 + 2x + 3$

Pembahasan: Kunci (A)

Jika diketahui titik potong dengan sumbu X, yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ serta titik lain

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Diketahui potong dengan sumbu x , yaitu (-3, 0) dan (1, 0). Titik potong dengan sumbu Y = (0, 3), sehingga persamaan parabola $y = a(x+3)(x-1)$

Parabola tersebut melalui (0,3) sehingga

$$3 = a(0+3)(0-1)$$

$$3 = a.(3).(-1)$$

$$a = -1$$

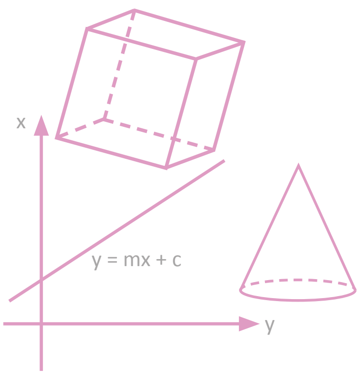
Maka persamaan parabola tersebut adalah:

$$y = -1(x+3)(x-1)$$

$$= -x^2 - 2x + 3$$

Bab 4

Sistem Persamaan Linear dan Nonlinear



A. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel:

$$ax + by = c \qquad \text{(i)}$$
$$px + qy = r \qquad \text{(ii)}$$

dengan x dan y variabel.
a, b, c, p, q, r adalah konstanta.
Pasangan berurutan $\{x_0, y_0\}$ merupakan penyelesaian dari sistem persamaan dua variabel apabila x_0 dan y_0 memenuhi persamaan (i) sekaligus (ii).

- Sistem persamaan linear dua variabel akan mempunyai **penyelesaian tunggal** jika $aq \neq bp$.
- Sistem persamaan linear dua variabel akan mempunyai **penyelesaian banyak** jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.
- Sistem persamaan linear dua variabel **tidak mempunyai penyelesaian** jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$.

B. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Bentuk umum sistem persamaan linear tiga variabel:

$$ax + by + cz = d$$
$$kx + ly + mz = n$$
$$px + qy + rz = s$$

dengan x,y, dan z sebagai peubah atau variabel. a, b, c, d, k, l, m, n, p, q, r, dan s adalah konstanta.
Sistem persamaan linear dua dan tiga variabel dapat diselesaikan dengan:

- Metode eliminasi
- Metode campuran
- Metode substitusi

C. Sistem Persamaan Nonlinear

Sistem persamaan nonlinear adalah suatu sistem persamaan di mana sistem persamaan tersebut mengandung paling sedikit satu persamaan nonlinear.

Contoh:

$$x^2 - y^2 = 2$$
$$x + y = 2$$

Soal dan Pembahasan

1. **(SNMPTN 2009)**

   Pak Rahman mempunyai sekantong permen yang akan dibagikan kepada anak-anak. Jika tiap anak diberi 2 permen, maka di dalam kantong masih tersisa 4 permen. Namun, bila tiap anak akan diberi 3 permen, akan ada 2 anak yang tidak mendapat permen dan 1 anak mendapat 2 permen. Jika x menyatakan banyak permen dalam kantong dan y menyatakan banyak anak, maka sistem persamaan yang mewakili persamaan di atas adalah ...

   (A) $\begin{cases} x + 4 = 2y \\ x - 7 = 3y \end{cases}$

   (B) $\begin{cases} x - 4 = 3y \\ x + 7 = 2y \end{cases}$

   (C) $\begin{cases} x - 4 = 3y \\ x + 7 = y \end{cases}$

   (D) $\begin{cases} x + 4 = y \\ x - 7 = 2y \end{cases}$

   (E) $\begin{cases} x - 4 = 2y \\ x + 7 = 3y \end{cases}$

Pembahasan: Kunci (E)

Misalkan:

x = banyak permen di kantong

y = banyak anak

Dari soal diperoleh: tiap anak diberi 2 permen, maka di dalam kantong masih tersisa 4 permen

$x = 2(y) + 4$ atau $x - 4 = 2y$

Tiap anak diberi 3 permen, akan ada 2 anak yang tidak mendapat permen dan 1 anak mendapat 2 permen

$x = 3(y - 3) + 2(0) + 1(2)$

$\Leftrightarrow x = 3y - 9 + 2$

$\Leftrightarrow x + 7 = 3y$

Jadi, diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{cases} x - 4 = 2y \\ x + 7 = 3y \end{cases}$$

2. **(UM UGM 2009)**

   2 kg jeruk dan 3 kg apel harganya Rp45.000,00. 5 kg jeruk dan 2 kg apel harganya Rp52.000,00. Harga satu kg jeruk dan satu kg apel sama dengan ...

   (A) Rp6.000,00
   (B) Rp9.000,00
   (C) Rp11.000,00
   (D) Rp17.000,00
   (E) Rp20.000,00

Pembahasan: Kunci (D)

Misalkan: x = jeruk

y = apel

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 45000 \,|\times 2|\, 4x + 6y = 90000 \\ \underline{5x + 2y = 52000 \,|\times 3|\, 15x + 6y = 156000} \; - \\ \qquad\qquad\qquad -11x = -66.000 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x = 6.000 \end{array}$$

Selanjutnya nilai x disubstitusikan ke persamaan $2x + 3y = 45000$, diperoleh

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 45000 \\ 12000 + 3y &= 45000 \\ 3y &= 33000 \\ y &= 11000 \end{aligned}$$

Jadi, $x + y = 6000 + 11000 = 17000$

3. **(UNAS 2008)**
Pada toko buku "Murah", Adil membeli 4 buku, 2 pulpen, dan 3 pensil dengan harga Rp26.000,00. Bima membeli 3 buku, 3 pulpen, dan 1 pensil dengan harga Rp21.500,00. Citra membeli 3 buku dan 1 pensil dengan harga Rp12.500,00. Jika Dina membeli 2 pulpen dan 2 pensil, maka ia harus membayar ...
(A) Rp5.000,00
(B) Rp6.500,00
(C) Rp10.000,00
(D) Rp11.000,00
(E) Rp13.000,00

Pembahasan: Kunci (C)

Misalkan: Buku = b
Pulpen = p
Pensil = q

Dari soal cerita, diperoleh 3 persamaan linear dengan 3 peubah:

$4b + 2p + 3q = 26.000$ (i)
$3b + 3p + q = 21.500$ (ii)
$3b + q = 12.500$ (iii)

Eliminasi persamaan (ii) dan (iii) diperoleh

$$\begin{array}{rl} 3b + 3p + q &= 21.500 \\ \underline{3b \quad + \quad q} & \underline{= 12.500} \; - \\ 3p &= 9.000 \Rightarrow p = 3.000 \end{array}$$

Selanjutnya diperoleh

$4b + 2p + 3q = 26.000 \,|\, x3 \,|\, 12b + 6p + 9q = 78.000$

$3b + 3p + q = 21.500 \,\underline{|\, x4 \,|\, 12b + 12p + 4q = 86.000}$

–

$-6p + 5q = -8.000$

$\Leftrightarrow -6(3.000) + 5q = -8.000$

$\Leftrightarrow 5q = -8.000 + 18.000$

$\Leftrightarrow q = 2.000$

Harga 2 pulpen dan 2 pensil yang dibeli Dina adalah:

$2p + 2q = 2(3.000) + 2(2.000) = 10.000$

4. **(UNAS 2007)**

Ani, Nia, dan Ina pergi bersama-sama ke toko buah. Ani membeli 2 kg apel, 2 kg anggur, dan 1 kg jeruk dengan harga Rp67.000,00. Nia membeli 3 kg apel, 1 kg anggur, dan 1 kg jeruk dengan harga Rp61.000,00. Ina membeli 1 kg apel, 3 kg anggur, dan 2 kg jeruk dengan harga Rp80.000,00. Harga 1 kg apel, 1 kg anggur, dan 4 kg jeruk seluruhnya adalah ...

(A) Rp37.000,00 (D) Rp55.000,00
(B) Rp44.000,00 (E) Rp58.000,00
(C) Rp51.000,00

Pembahasan: Kunci (E)

Misal:

x = harga 1 kg apel

z = harga 1 kg jeruk

y = harga 1 kg anggur

Dengan demikian, dari keterangan soal diperoleh sistem persamaan linear

$2x + 2y + z = 67.000$ ... (1)

$3x + y + z = 61.000$ ... (2)
$x + 3y + 2z = 80.000$ ... (3)
Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{array}{l} 2x+2y+z=67.000 \\ \underline{3x+y+z=61.000}\,- \\ -x+y=6.000\ldots(4) \end{array}$$

Dari (2) dan (3) diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|l} 3x+y+z=61.000 & \times 2 & 6x+2y+2z=122.000 \\ x+3y+2z=80.000 & \times 1 & \underline{x+3y+2z=80.000}\,- \\ & & \quad 5x-y=42.000\ldots(5) \end{array}$$

Dari (4) dan (5) diperoleh:

$$\begin{array}{l} -x+y=6.000 \\ \underline{5x-y=42.000}\,- \\ 4x=48.000 \\ x=12.000 \end{array}$$

Nilai x = 12.000 disubstitusikan ke (4) diperoleh
$-12.000 + y = 6.000 \Leftrightarrow y = 18.000$
Nilai x = 12.000 dan y = 18.000 disubstitusikan ke (2) diperoleh:
$3(12.000) + 18.000 + z = 61.000 \Leftrightarrow z = 7.000$
Jadi, harga 1 kg apel, 1 kg anggur, dan 4 kg jeruk adalah
$x + y + 4z = 12.000 + 18.000 + 4(7.000)$
= Rp58.000,00.

5. Diketahui sistem persamaan $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$ dan $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=8$, maka nilai dari $\frac{1}{x+y}$ sama dengan ....
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 3 (E) 6

Pembahasan: Kunci (E)

Diketahui sistem persamaan $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$ dan $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=8$.

Misalkan $\frac{1}{x}=a$ dan $\frac{1}{y}=b$, maka sistem persamaannya menjadi:

2a + b = 1

a – 2b = 8

Eliminasi kedua persamaan di atas menjadi:

$$\begin{array}{lcll} 2a+b=1 & |\times 1| & 2a+b & =1 \\ \underline{a-2b=8} & \underline{|\times 2|} & \underline{2a-4b} & \underline{=16}\ - \\ & & 5b & =-15 \\ & & b & =-3 \end{array}$$

Substitusikan nilai b = –3 ke persamaan a – 2b = 8, diperoleh:

a – 2(-3) = 8 $\Rightarrow$ a = 2

Jadi, diperoleh $\frac{1}{x}=a \Rightarrow x=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$

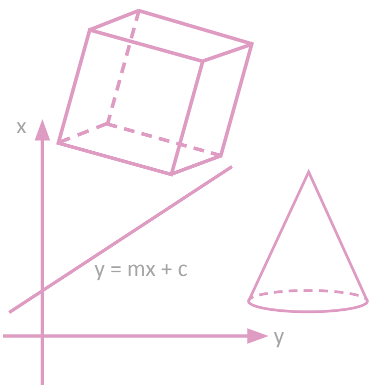
$$\frac{1}{y}=b \Rightarrow y=\frac{1}{b}=-\frac{1}{3}$$

Jadi, $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{3-2}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$

Bab 5

Pertidaksamaan

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA



Diberikan untuk a, b, c dan d $\in$ R. Sifat-sifat umum pertidaksamaan, antara lain:

1. $a > b$, maka $a + c > b + c$
2. $a > b$, $c > d$, maka $a + c > b + d$
3. $a > b$, $b > c$, maka $a > c$
4. $a > b$, $c > 0$, maka $ac > bc$
5. $a > b$, $c < 0$, maka $ac < bc$
6. $\frac{a}{b} > 0$, maka $a, b > 0$ atau $a,b < 0$
7. $a > b$, $a > 0$, $b > 0$, maka $a^2 > b^2$
   $a > b$, $a < 0$, $b < 0$, maka $a^2 < b^2$

A. Pertidaksamaan Linear

Bentuk umum pertidaksamaan linear:

- $ax + b < c, a \neq 0$
- $ax + b > c, a \neq 0$
- $ax + b \leq c, a \neq 0$
- $ax + b \geq c, a \neq 0$

Cara menyelesaikan pertidaksamaan linear adalah dengan cara memisahkan antara variabel dengan konstanta. **Ingat!** Tanda pertidaksamaan dibalik ketika kedua ruas dibagi bilangan negatif.

B. Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat:

- $px^2 + qx + c < 0$
- $px^2 + qx + c > 0$
- $px^2 + qx + c \leq 0$
- $px^2 + qx + c \geq 0$

dengan $p, q, r \in R, p \neq 0$

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat:

1. Tentukan pembuat nol dari pertidaksamaan bentuk kuadrat dengan cara pemfaktoran.

2. Buatlah garis bilangan dan tempatkan pembuat nol tersebut pada garis bilangan, kemudian tentukan tanda-tandanya, sehingga diperoleh interval yang memenuhi.

B. Pertidaksamaan Bentuk Pecahan

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksaman bentuk pecahan:

1. Tentukan pembuat nol bagian pembilang dan penyebut dari pecahan
2. Buatlah garis bilangan dan tempatkan pembuat nol tersebut pada garis bilangan kemudian tentukan tanda-tandanya, sehingga diperoleh interval yang memenuhi.
3. Berdasarkan tanda-tanda interval yang diperoleh pada langkah 2, tentukan interval yang memenuhi dengan syarat bagian penyebut tidak boleh sama dengan nol.

D. Pertidaksamaan Bentuk Akar

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan bentuk akar:

1. Kuadratkan kedua ruas dan tentukan pembuat nol dari pertidaksamaan tersebut.
2. Masukkan syarat di dalam akar haruslah lebih besar atau sama dengan nol.
3. Buatlah garis bilangan dan tempatkan pembuat nol tersebut pada garis bilangan kemudian tentukan tanda-tandanya, sehingga diperoleh interval yang memenuhi.

E. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Definisi nilai mutlak: $|x| = \begin{cases} x, \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$

Misalkan: |3| = 3, |-6| = -(-6) = 6

Sifat-sifat nilai mutlak:

1. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ atau } x \geq a$
3. $|x| = \sqrt{x^2}$
4. $|x.y| = |x|.|y|$
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0$
6. Jika $|x| < |y|$, maka $x^2 < y^2$
7. $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \leq 0$
8. $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k \Leftrightarrow (f(x) - k \cdot g(x))(f(x) + k \cdot g(x)) \leq 0$

Soal dan Pembahasan

1. **(SNMPTN 2009)**
   Pernyataan yang setara (ekuivalen) dengan $|4x-5| < 13$ adalah...
   (A) $-8 < |4x-5| < 13$
   (B) $6x < 18$
   (C) $-8 < 4x - 5 < 18$
   (D) $|5 - 4x| > -13$
   (E) $-12 < 6x < 27$

   Pembahasan: Kunci (E)
   Gunakanlah sifat: $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$
   $|4x - 5| < 13$
   $\Leftrightarrow -13 < 4x-5 < 13$
   $\Leftrightarrow -8 < 4x < 18 \quad \cdot\frac{3}{2}$
   $\Leftrightarrow (-8 < 4x < 18)$
   $\Leftrightarrow -12 < 6x < 27$

2. **(SNMPTN 2007)**
   Solusi pertaksamaan $\frac{(x-2)(x^2+x-6)}{x^2+x-20} > 0$ adalah ...
   (A) $x < -5$ atau $-3 < x < 2$
   (B) $x < -3$ atau $2 < x < 4$
   (C) $-5 < x < -3$ atau $x > 2$
   (D) $-5 < x < -3$ atau $x > 4$
   (E) $-3 < x < -2$ atau $x > 4$

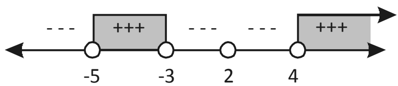
   Pembahasan: Kunci(D)
   $$\frac{(x-2)(x^2+x-6)}{x^2+x-20} > 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)(x-2)}{(x-4)(x+5)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)\ (x+3)}{(x-4)(x+5)} > 0$$

Diperoleh pembuat nolnya adalah:

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $\quad$ $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ $\quad$ $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$



Himpunan penyelesaiannya adalah:

{-5 < x < -3 atau x > 4}

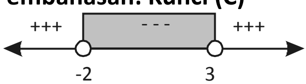
3. **(UM UGM 2006)**

Jika $\{x \in R \mid a < x < b\}$ adalah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $(x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2} < 6$, maka nilai a + b adalah ...

(A) 4 $\quad$ (C) 1 $\quad$ (E) –4

(B) 2 $\quad$ (D) –2

Pembahasan: Kunci (C)



$$(x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2} < 6$$

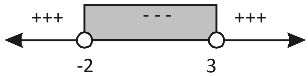
$$x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 6 < 0$$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x-3)(x+2) < 0$$

$$-2 < x < 3$$

Perhatikan ilustrasi gambar berikut:

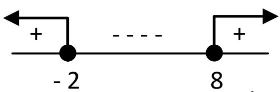


Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan di atas adalah $\{x \in R \mid -2 < x < 3\}$, dan diperoleh a = -2 dan b = 3. Jadi, a + b = -2 + 3 = 1.

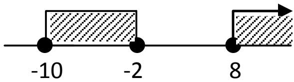
4. **(SNMPTN 2007)**
Nilai-nilai yang memenuhi pertaksamaan
$|x - 2| \geq \sqrt{2x + 20}$ adalah ...
A. $\infty < x \leq -2$ atau $2 \leq x < 10$
B. $\infty < x \leq -2$ atau $2 \leq x < \infty$
C. $\infty < x < -2$ atau $8 \leq x < \infty$
D. $10 \leq x \leq -2$ atau $8 \leq x < \infty$
E. $10 \leq x \leq 2$ atau $8 \leq x < \infty$

Pembahasan: Kunci (D)

$|x - 2| \geq \sqrt{2x + 20}$ (kedua ruas dikuadratkan)
$(x - 2)^2 \geq 2x + 20$
$x^2 - 4x + 4 \geq 2x + 20$
$x^2 - 6x - 16 \geq 0$
$(x + 2)(x - 8) \geq 0$



$x \leq -2$ atau $x \geq 8$ atau dapat ditulis juga dengan
$\infty < x \leq -2$ atau $8 \leq x < \infty$....(i)
Ingat syarat: nilai dalam akar ≥ 0
$2x + 20 \geq 0$
$x \geq -10$ ......(ii)
Nilai-nilai x yang memenuhi
(i) $\cap$ (ii), yaitu



$-10 \leq x \leq -2$ atau $8 \leq x < \infty$

5. Pertidaksamaan $\left|\dfrac{2x+6}{x-2}\right| < 2$ dipenuhi oleh ...

   (A) $x < 4$ (C) $x < -3$ (E) $x < -1$

   (B) $x < 3$ (D) $x < 1$

   Pembahasan: Kunci (C)

   Diketahui sistem pertidaksamaan $\left|\dfrac{2x+6}{x-2}\right| < 2$, maka:

   Gunakan sifat:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k \Leftrightarrow (f(x) - k \cdot g(x))(f(x) + k \cdot g(x)) \leq 0$$

$$\left|\frac{2x+6}{x-2}\right| < 2$$

$$\Leftrightarrow ((2x+6) - 2(x-2))((2x+6) - 2(x-3)) < 0$$

$$\Leftrightarrow 9(4x+12) < 0$$

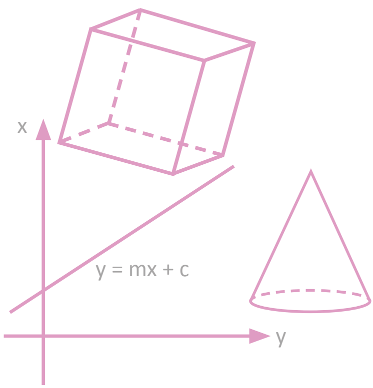
$$\Leftrightarrow 4x+12 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -3$$

Bab 6

Logika

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA



A. Tabel Kebenaran

Beberapa operator yang digunakan dalam logika.

No.	Operator		Penghubung
	Nama	Lambang	
1.	Negasi	$\sim$	Tidak, bukan
2.	Konjungsi	$\wedge$	dan
3.	Disjungsi	$\vee$	atau
4.	Implikasi	$\Rightarrow$	Jika ... maka
5.	Biimplikasi	$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Ingat:

1. Konjungsi akan bernilai benar jika kedua pernyataan benar.
2. Disjungsi akan bernilai benar jika salah satu pernyataan bernilai benar dan akan bernilai salah jika keduanya salah.
3. Implikasi akan bernilai benar jika antesedennya bernilai salah dan akan bernilai salah jika pernyataan pertama bernilai benar, sedangkan kedua bernilai salah.
4. Biimplikasi akan bernilai benar jika kedua pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang sama.

B. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika diketahui pernyataan $p \Rightarrow q$, maka

Konvers : $q \Rightarrow p$

Invers : $\sim p \Rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \Rightarrow \sim p$

C. Pernyataan-pernyataan yang Ekuivalen

Ekuivalensi adalah pernyataan-pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran sama. Berikut beberapa contoh pernyataan yang saling ekuivalen.

1. $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
2. $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
3. $p \Rightarrow q = \sim q \Rightarrow \sim p = \sim p \vee q$
4. $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
5. $\sim(p \Rightarrow q) = p \wedge \sim q$

Ingat!

1. $p \vee q \equiv q \vee p$
2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
4. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
5. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
6. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

D. Tautologi dan Kontradiksi

- Tautologi adalah pernyataan yang semua nilai kebenaran dari konklusinya adalah benar tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponen penyusunnya.

- Kontradiksi adalah pernyataan yang semua nilai kebenaran dari konklusinya adalah salah.
- Jika konklusi dari pernyataan mempunyai nilai kebenaran benar dan salah (bukan tautologi maupun kontradiksi) disebut dengan kontigen.

E. Penarikan Kesimpulan

Modus Ponens

Premis 1:	$p \Rightarrow q$	(B)
Premis 2:	p	(B)
Kesimpulan	q	(B)

Modus Tollens

Premis 1:	$p \Rightarrow q$	(B)
Premis 2:	$\sim q$	(B)
Kesimpulan	$\sim p$	(B)

Prinsip Silogisme

Premis 1:	$p \Rightarrow q$	(B)
Premis 2:	$q \Rightarrow r$	(B)
Kesimpulan	$p \Rightarrow r$	(B)

F. Kuantor

- **Kuantor Universal**

  Pada kuantor universal menggunakan kata**: semua, untuk setiap.** Lambangnya adalah: $\forall$. Ingkarannya adalah $\exists$

- **Kuantor Eksistensial**
  Pada kuantor eksistensial menggunakan kata**:** **ada, terdapat, beberapa.** Lambangnya adalah: $\exists$. Ingkarannya adalah $\forall$.

G. Negasi/Ingkaran dari Suatu Pernyataan

No.	Pernyataan	Negasi/Ingkaran
1.	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$
2.	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$
3.	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
4.	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
5.	$\forall p$	$\exists p$
6.	$\exists p$	$\forall p$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2006)**
   Suatu pernyataan "Jika ABCD layang-layang, maka AC tegak lurus BD". Pernyataan yang ekuivalen dengan implikasi di atas adalah ...
   (A) Jika AC tidak tegak lurus BD, maka ABCD bukan layang-layang.
   (B) Jika ABCD bukan layang-layang, maka AC tidak tegak lurus BD.
   (C) Jika AC tegak lurus BD, maka ABCD layang-layang.
   (D) Jika ABCD bukan layang-layang, maka AC tegak lurus BD.

(E) Jika AC tegak lurus BD, maka ABCD bukan layang-layang.

Pembahasan: Kunci (A)

Misalkan:

p : ABCD layang-layang

q : AC tegak lurus BD

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$

Jadi, pernyataan "Jika ABCD layang-layang, maka AC tegak lurus BD" ekuivalen dengan "Jika AC tidak tegak lurus BD, maka ABCD bukan layang-layang".

2. **(SNMPTN 2009)**

Jika diketahui tiga pernyataan berikut:

P : Jakarta ada di Pulau Bali,

Q : Dua adalah bilangan prima,

R : Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil.

Pernyataan majemuk berikut ini yang bernilai benar adalah...

(A) $(\sim P \vee Q) \wedge R$

(B) $(\sim Q \vee \sim R) \wedge (\sim Q \vee P)$

(C) $(P \vee \sim Q) \wedge (Q \vee \sim R)$

(D) $\sim P \Rightarrow R$

(E) $\sim R \wedge \sim (Q \wedge R)$

Pembahasan: Kunci (E)

P : Jakarta ada di Pulau Bali adalah pernyataan yang salah karena Jakarta ada di Pulau Jawa.

$\Rightarrow$ P = salah

Q: Dua adalah bilangan prima adalah pernyataan yang benar.

$\Rightarrow$ Q = benar

R : semua bilangan prima adalah bilangan ganjil, adalah pernyataan yang salah, karena 2 bilangan prima tetapi genap.

$\Rightarrow$ R = salah

Pernyataan majemuk yang benar adalah:

$$\begin{aligned}\sim R \wedge \sim(Q \wedge R) &= \sim S \wedge (B \wedge S)\\ &= \sim S \wedge \sim S\\ &= B \wedge B = B\end{aligned}$$

3. **(SNMPTN 2009)**

Jika x adalah peubah pada himpunan bilangan real, nilai x yang memenuhi agar pernyataan "Jika $x^2 - 2x - 3 = 0$, maka $x^2 - x < 5$" bernilai SALAH adalah...

(A) -1 (C) 2 (E) 4
(B) 1 (D) 3

Pembahasan: Kunci (D)

Pernyataan "Jika $x^2 - 2x - 3 = 0$, maka $x^2 - x < 5$" bernilai SALAH jika $x^2 - 2x - 3 = 0$ benar dan $x^2 - x < 5$ salah.

Akan dicari nilai x yang memenuhi $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3$ atau $x = -1$

Untuk $x = 3 \rightarrow$ $x^2 - x < 5$

$9 - 3 < 5$

$6 < 5 \rightarrow$ salah

Untuk $x = -1 \rightarrow$ $x^2 - x < 5$

$(-1)^2 - 1 < 5$

$0 < 5 \rightarrow$ benar

Jadi, supaya $x^2 - 2x - 3 = 0$ benar dan $x^2 - x < 5$ salah, nilai x yang memenuhi adalah x = 3.

4. **(UNAS 2009)**
   Diberikan beberapa pernyataan:
   Premis 1 : Jika Santi sakit, maka ia pergi ke dokter.
   Premis 2: Jika Santi pergi ke dokter, maka Santi membeli obat.
   Kesimpulan yang sah dari dua pernyataan di atas adalah....
   (A) Santi sakit dan pergi ke dokter.
   (B) Santi tidak sakit atau membeli obat.
   (C) Santi sakit dan membeli obat.
   (D) Jika Santi sakit, maka ia membeli obat.
   (E) Jika Santi membeli obat maka ia sakit.
   Pembahasan: Kunci (D)
   Ingat silogisme:
   $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$
   Premis 1 : Jika Santi sakit, maka ia pergi ke dokter.
   Premis 2 : Jika Santi pergi ke dokter, maka Santi membeli obat.
   Kesimpulannya:
   Jika Santi sakit, maka Santi membeli obat.

5. **(UNAS 2008)**
   Ingkaran dari pernyataan "Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap" adalah ...
   (A) Semua bilangan prima adalah bilangan genap.
   (B) Semua bilangan prima bukan bilangan genap.
   (C) Beberapa bilangan prima bukan bilangan genap.
   (D) Beberapa bilangan genap bukan bilangan prima.

(E) Beberapa bilangan genap adalah bilangan prima.

Pembahasan: Kunci (B)

Ingkaran dari pernyataan berkuantor:
Semua...adalah→beberapa...bukan
Beberapa...adalah→semua...bukan
Jadi, ingkaran dari pernyataan "Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap" adalah "Semua bilangan prima bukan bilangan genap".

6. **(UNAS 2009)**
Perhatikan premis-premis berikut ini!
Jika Adi murid rajin, maka Adi murid pandai
Jika Adi murid pandai, maka ia lulus ujian
Ingkaran dari kesimpulan di atas adalah ....
(A) Jika Adi murid rajin, maka ia tidak lulus ujian.
(B) Adi murid rajin dan ia tidak lulus ujian.
(C) Adi bukan murid rajin atau ia lulus ujian
(D) Jika Adi bukan murid rajin, maka ia tidak lulus ujian.
(E) Jika Adi murid rajin maka ia lulus ujian

Pembahasan: Kunci (B)

Ingat!

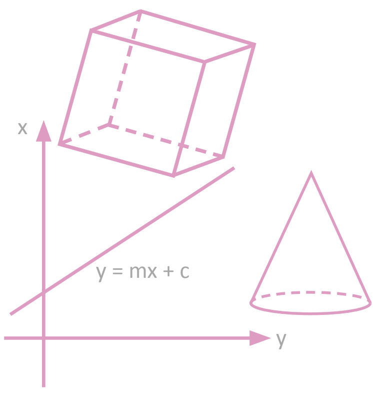
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

Diketahui premis-premis berikut ini!
Jika Adi murid rajin, maka Adi murid pandai
Jika Adi murid pandai, maka ia lulus ujian
Kesimpulan: Jika Adi murid rajin maka ia lulus ujian
Ingat: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
Maka ingkaran dari kesimpulan adalah:
Adi murid rajin dan ia tidak lulus ujian

Bab 7

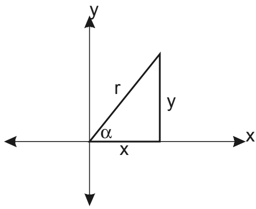
TRIGONOMETRI

Strategi Kebut Semalam
Matematika SMA



A. Pengertian Trigonometri

Trigonometri adalah ilmu yang mempelajari tentang ukuran-ukuran garis dan sudut pada segitiga.
Perhatikan gambar di bawah!



$$\sin\alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{r}{y}$$

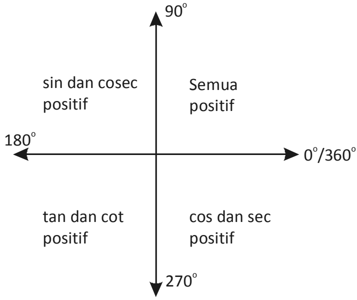
$$\cos\alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{x}{y}$$

B. Kuadran dan Sudut Istimewa

Kuadran adalah daerah yang dibatasi oleh sudut-sudut tertentu. Daerah kuadran dibagi menjadi 4, yaitu:

- Kuadran I jika sudutnya antara 0^o sampai 90^o.
- Kuadran II jika sudutnya antara 90^o sampai 180^o.
- Kuadran III jika sudutnya antara 180^o sampai 270^o.
- Kuadran IV jika sudutnya antara 270^o sampai 360^o.



Sudut Istimewa

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Untuk menentukan nilai sudut istimewa lebih dari 90^o, dapat menggunakan rumus berikut:

$$\text{Sudut} = (\alpha \pm 90^o)$$

Dengan ketentuan:

- Jika k genap, maka fungsi tetap, yakni:
  sin $\Rightarrow$ sin
  cos $\Rightarrow$ cos
  tan $\Rightarrow$ tan
- Jika k ganjil, maka fungsi berubah, yakni:
  sin $\Rightarrow$ cos
  cos $\Rightarrow$ sin
  tan $\Rightarrow$ cot

Ingat: tanda negatif sesuai dengan ketentuan pada kuadran.

C. Identitas Trigonometri

Dengan menggunakan teorema Pythagoras, yakni:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

diperoleh identitas trigonometri.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1 + \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

D. Rumus-rumus pada Trigonometri

1. Jumlah dan selisih dua sudut

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

2. Rumus-rumus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

3. Rumus jumlah dan selisih

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

4. Rumus perkalian

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

E. Persamaan Trigonometri

$$\sin x = \sin a \Rightarrow x_1 = p + n.360^o,\ x_2 = (180-p)^o + n.360^o$$

$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = \pm p + n.360^o$$

$$\tan x = \tan a \Rightarrow x = p + n.180^o$$

Dengan x anggota bilangan real dan n anggota bilangan bulat.

Persamaan a cos x + b sin x = c.

Bentuk a cos x + b sin x = c dapat diubah ke dalam bentuk k cos (x – α) dengan k konstanta positif dan $0 \le \alpha \le 360^o$.

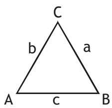
$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dan } \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Ingat: dalam menentukan nilai α perhatikan kuadrannya, hal ini ditentukan oleh tanda a dan b.

F. Aturan Sinus dan Cosinus untuk Segitiga Sembarang

- Aturan Sinus

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



Dengan R = jari-jari lingkaran luar segitiga

- Aturan Cosinus

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

G. Luas Segitiga

1. Jika dua sisi dan satu sudut diketahui

$$L=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

2. Jika diketahui dua sudut dan satu sisi

$$L=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$$

3. Jika diketahui ketiga sisinya

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

H. Fungsi dan Grafik Trigonometri

1. Periode

- $F(x) = a\sin b(x \pm q) + c$, periode → $\frac{2\pi}{|b|}$
- $F(x) = a\cos b(x \pm q) + c$, periode → $\frac{2\pi}{|b|}$
- $F(x) = a\tan b(x \pm q) + c$, periode → $\frac{\pi}{|b|}$

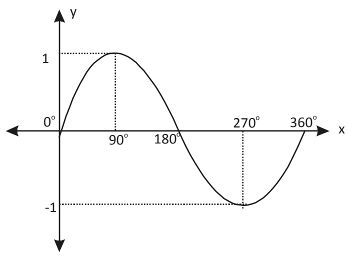
dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan q dalam derajat .

2. Pergeseran Grafik

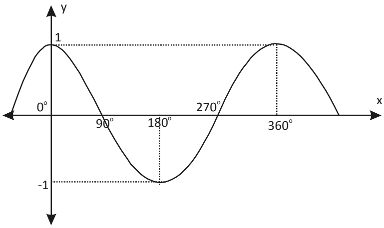
- Arah sumbu x
  a. Digeser ke kiri sebesar q(+)
  b. Digeser ke kanan sebesar q(-)
- Arah sumbu y
  a. Digeser ke atas sebanyak c(+)
  b. Digeser ke bawah sebanyak c(-)

3. Grafik Fungsi

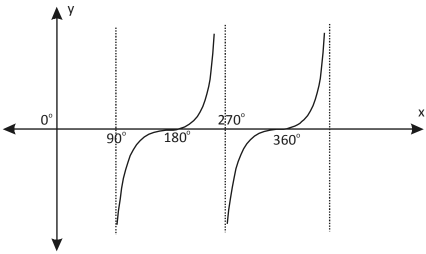
y = sin x



y = cos x



y = tan x



4. Maksimum dan Minimum Fungsi Trigonometri

Fungsi $F(x) = A \sin B(x \pm q) + C$ dan F(x) = A cos B (x $\pm$ q) + C mempunyai nilai

- Maksimum $= |A| + C$
- Minimum $= -|A| + C$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2008)**

Nilai dari $\dfrac{\cos 50^0 + \cos 40^0}{\sin 50^0 + \sin 40^0}$ adalah ...

(A) 1 (C) 0 (E) -1

(B) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (D) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Pembahasan: Kunci (A)

$$\frac{\cos 50^0 + \cos 40^0}{\sin 50^0 + \sin 40^0} = \frac{\cos\left(90^0 - 40^0\right) + \cos 40^0}{\sin\left(90^0 - 40^0\right) + \sin 40^0}$$

$$= \frac{\sin 40^0 + \cos 40^0}{\cos 40^0 + \sin 40^0} = 1$$

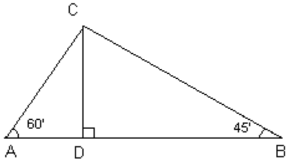
2. **(SPMB 2007)**
Dalam Δ ABC, jika D pada AB, sehingga CD $\perp$ AB, BC = a, $\angle$CAB = 60^o, dan $\angle$ABC = 45^o, maka AD = ...

(A) $\frac{1}{6}\sqrt{2}\,a$ (D) $\frac{1}{3}\sqrt{6}\,a$

(B) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$ (E) $\frac{1}{6}\sqrt{6}\,a$

(C) $\frac{1}{3}\sqrt{2}\,a$

Pembahasan: Kunci (E)



$$\frac{AC}{\sin 45^o} = \frac{BC}{\sin 60^o} \Leftrightarrow \frac{AC}{\sin 45^o} = \frac{a}{\sin 60^o}$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{\sin 45^o}{\sin 60^o} \cdot a$$

Perhatikan Δ ADC!

Diketahui AD = AC cos 60^o, maka diperoleh

$$AC = \frac{\sin 45^o}{\sin 60^o} (a)(\cos 60^o)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} (a)(\frac{1}{2})$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}\right)(a)$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{6}\ a$$

4. **(UM UGM 2008)**

Jika x_1 dan x_2 memenuhi persamaan $12 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, maka $\sec^2 x_1 + \sec^2 x_2 = \ldots$

(A) 26 (C) 24 (E) 22

(B) 25 (D) 23

Pembahasan: Kunci (B)

Misalkan: cos x = a

Sehingga diperoleh

$$12\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 - a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a+1)(3a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{4} \text{ atau } a_2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos x_1 = -\frac{1}{4} \text{ atau } \cos x_2 = \frac{1}{3}$$

Jadi,

$$\sec^2 x_1 + \sec^2 x_2 = \left(\frac{1}{\cos x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos x_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{-1/4}\right)^2 + \left(\frac{1}{1/3}\right)^2 = 16 + 9 = 25$$

5. **(SNMPTN 2008)**
Jika $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$, maka $\sin^3\theta + \sin^3\theta = ...$

(A) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{9}{16}$ (E) $\frac{11}{16}$

(B) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{8}$

Pembahasan: Kunci (E)

Diketahui $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$.

$$\sin^2\theta + \cos\theta^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta \,.\, \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} = \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta \cdot \cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{2+9}{16} = \frac{11}{16}$$

6. **(UNAS 2009)**
   Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{12}{13}$, x sudut tumpul dan y sudut lancip. Nilai cos (x – y) = ...

   (A) $-\frac{84}{65}$ (C) $-\frac{30}{65}$ (E) $-\frac{84}{65}$

   (B) $-\frac{33}{65}$ (D) $-\frac{12}{65}$

   Pembahasan: Kunci (B)

   $\sin x = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$ (x tumpul)

   $\cos y = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin x = \frac{5}{13}$ (y lancip)

   $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x.\sin y$

   $$= -\frac{4}{5}.\frac{12}{13} + \frac{3}{5}.\frac{5}{13}$$

   $$= \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = -\frac{33}{65}$$

7. **(SPMB 2007)**
   Jumlah semua sudut α, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$, yang memenuhi sin 3α = cos2α adalah ...

(A) $\frac{3}{5}\pi$ (C) $2\frac{4}{5}\pi$ (E) $6\frac{1}{2}\pi$

(B) $1\frac{1}{2}\pi$ (D) $4\frac{1}{2}\pi$

Pembahasan: Kunci (A)

Karena $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$, maka α sudut lancip

Dari soal diketahui:

$\sin 3\alpha = \cos 2\alpha$

$= \sin (90^o - 2\alpha)$

Ingat:

$\sin x = \sin a \Rightarrow x_1 = p + n.360^o$, $x_2 = (180 - p)^o + n.360^o$

Maka diperoleh:

1. $3\alpha = (90^o - 2\alpha) + k.\ 2\pi$ ....(i)

$\Leftrightarrow 5\alpha = \frac{\pi}{2} + k.\ 2\pi$

- Untuk k = 0, maka $5\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{10}$

- Untuk k = 1, maka $5\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$

2. $3\alpha = (90 + 2\alpha) + k.\ 2\pi$ ....(ii)

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k.\ 2\pi$

- Untuk k = 0, maka $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

- Untuk k = 1, maka $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\ \pi$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{5\pi}{2} \text{ (tidak memenuhi syarat)}$$

Jadi, $\alpha_1 = \frac{\pi}{10}$ dan $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

Sehingga jumlah semua sudut α, yaitu:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{5}\pi$$

8. **(UNAS 2008)**
Diketahui segitiga MAB dengan AB = 300 cm, sudut MAB = 60^0 dan sudut ABM = 75^0. Maka AM = ...

(A) $150\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm
(B) $150\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ cm
(C) $150\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm
(D) $150\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ cm
(E) $150\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ cm

Pembahasan: Kunci (A)

$$\begin{aligned} \angle AMB &= 180^0 - \left(\angle BAM + \angle ABM\right) \\ &= 180^0 - \left(60^0 + 75^0\right) \\ &= 180^0 - 135^0 = 45^0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan aturan sinus diperoleh hubungan:

$$\frac{AB}{\sin\angle AMB} = \frac{AM}{\sin\angle ABM}$$

$$\frac{300}{\sin 45^0} = \frac{AM}{\sin 75^0}$$

$$\begin{aligned}\sin 75^0 &= \sin\left(45^0+30^0\right)\\ &= \sin 45^0\cdot\cos 30^0+\cos 45^0\cdot\sin 30^0\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Dengan demikian,

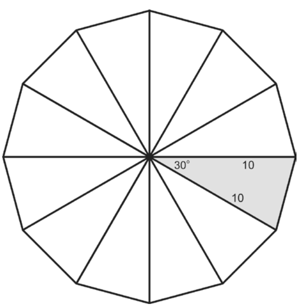
$$AM=\frac{300.\sin 75^0}{\sin 45^0}=\frac{300.\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$=300\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)=150\left(\sqrt{3}+1\right)$$

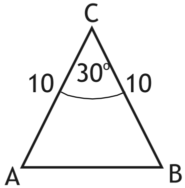
9. **(UNAS 2009)**
Luas segi dua belas beraturan dengan panjang jari-jari lingkaran luar 10 cm adalah ...

(A) 300 cm^2
(B) $300\sqrt{3}$ cm^2
(C) 600 cm^2
(D) $600\sqrt{3}$ cm^2
(E) 1.200 cm^2

Pembahasan: Kunci (A)



Perhatikan segitiga yang diarsir. Dapat digambar sebagai berikut:



Ingat! Luas segitiga jika diketahui dua sisi dan sudut yang diapit oleh dua sisi tersebut adalah:

$$L = \frac{1}{2} AC.BC.\sin C$$

Jadi, luas segitiga yang diarsir adalah:

$$L = \frac{1}{2} AC.BC.\sin C = \frac{1}{2}.10.10.\sin 30$$

$$= \frac{1}{2}.10.10.\frac{1}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

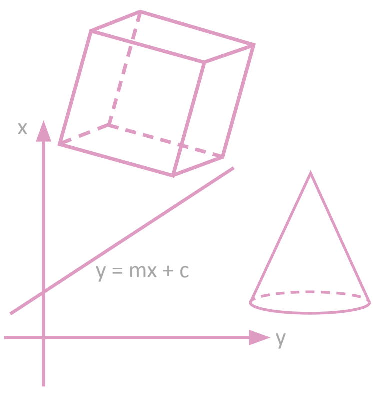
Luas total = 12 $\times$ luas segitiga yang diarsir

= 12 $\times$ 25 = 300 cm^2.

Bab 8

DIMENSI TIGA

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA



Dimensi tiga adalah bidang yang tidak mempunyai luas, sehingga bidang sesungguhnya tidak mungkin digambar, yang digambar hanya wakilnya.

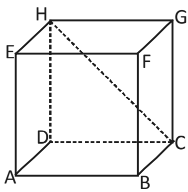
A. Jarak

- **Jarak antara dua titik**

  Panjang garis lurus yang menghubungkan kedua titik itu.

Ruas garis AB menunjukkan jarak antara titik A dan titik B

Contoh:



Diketahui kubus dengan panjang rusuk 10 cm. Tentukan jarak titik H dan C!

Jarak titik H dan C dengan menggunakan teorema Pythagoras adalah:

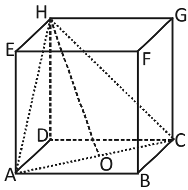
$$HC = \sqrt{HD^2 + DC^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

- **Jarak titik ke garis**

  Panjang garis tegak lurus dari titik ke garis.

AB menunjukkan jarak antara titik A dan garis g yang ditunjukkan oleh ruas garis AB yang tegak lurus g.

Contoh:



Diketahui kubus dengan panjang rusuk 10 cm. Tentukan jarak antara titik H dengan ruas garis AC!

$$HC = \sqrt{HD^2 + DC^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AC = HC = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

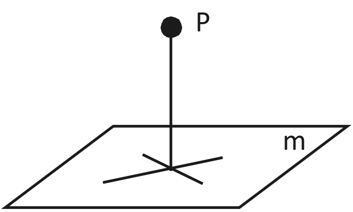
$$CO = \tfrac{1}{2}AC = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

Jarak titik H dengan ruas garis AC adalah:

$$HO = \sqrt{CO^2 + HC^2} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{10} \text{ cm}$$

- **Jarak antara titik dengan bidang**

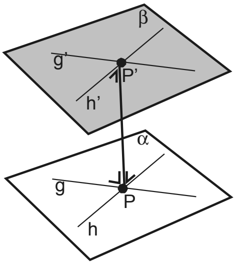
  Panjang garis tegak lurus dari titik ke bidang atau panjang garis lurus dari titik ke titik proyeksinya pada bidang.



Jarak antara P dan bidang ditunjukkan oleh garis m yang tegak lurus bidang.

- **Jarak antara bidang dengan bidang**

  Suatu bidang mempunyai jarak dengan bidang lain, apabila kedua bidang tersebut sejajar.



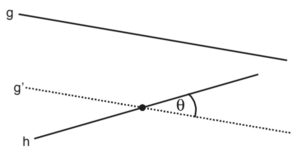
PP' merupakan jarak antara bidang α dengan β.

B. Sudut

- **Sudut dua garis bersilangan**

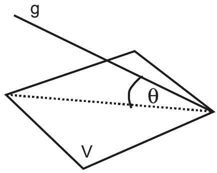
  Misalkan garis g dan h bersilangan, maka cara melukis sudut antara garis g dan h adalah sebagai berikut:

  - Lukis garis g' yang sejajar g dan memotong h
  - Sudut = sudut antara garis g' dan h



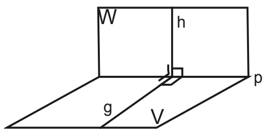
- **Sudut antara garis g dan bidang V**

  Langkah:
  - Proyeksikan garis g ke bidang V, sebut hasilnya g’
  - Sudut = sudut antara garis g dan g’



- **Sudut antara dua bidang**

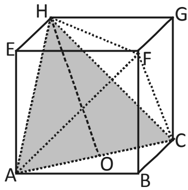
  Langkah:
  - Tentukan perpotongan antara bidang V dan W, sebut garis q
  - Lukis garis di bidang V tegak lurus q, sebut g
  - Lukis garis di bidang W tegak lurus q, sebut h
  - Sudut = sudut antara garis g dan h



Soal dan Pembahasan

1. **(SNMPTN 2007)**
   Diberikan kubus ABCD.EFGH. Perbandingan luas permukaan kubus ABCD.EFGH dengan permukaan limas H.ACF adalah ...
   (A) $\sqrt{5} : 2$ (D) $\sqrt{2} : 1$
   (B) $2 : \sqrt{3}$ (E) $\sqrt{3} : 1$
   (C) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

   Pembahasan: Kunci (E)



Misalkan panjang rusuk kubus = a, maka panjang diagonal sisi = $a\sqrt{2}$ dan luas permukaan kubus = $6a^2$.
Perhatikan limas beraturan H.ACF!

Panjang sisi-sisi limas adalah diagonal sisi = $a\sqrt{2}$
Menurut dalil Pythagoras,

$$HO = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$$

Luas sisi HAC $= \frac{1}{2} \times AC \times HO$

$$= \frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{1}{2}a\sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{4}a^2\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ a^2$$

Luas permukaan limas
= 4 $\times$ luas sisi HAC

$= 4 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}\ a^2 = 2\sqrt{3}\ a^2$

Luas permukaan kubus : luas permukaan limas

$= 6a^2 : 2\sqrt{3}\ a^2$

$= 6 : 2\sqrt{3}$

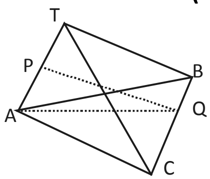
$= 3 : \sqrt{3}$

$= \sqrt{3} : 1$

2. Panjang setiap rusuk bidang empat beraturan T.ABC sama dengan 16 cm. Jika P pertengahan AT dan Q pertengahan BC, maka PQ sama dengan ...

(A) $8\sqrt{2}$
(B) $8\sqrt{3}$
(C) $8\sqrt{6}$
(D) $12\sqrt{2}$
(E) $12\sqrt{3}$

Pembahasan: Kunci (A)



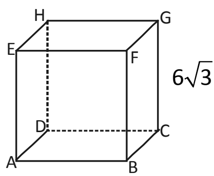
Diketahui:
Rusuk = 16 cm
P = pertengahan AT
Q = pertengahan BC,
akan dicari nilai panjang PQ = ...
AP = 8 cm

$$AQ = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{256 - 64} = \sqrt{192}$$

QP $\perp$ AT (QT garis tinggi dari segitiga AQT)

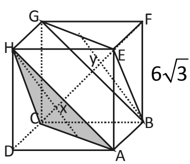
$$PQ = \sqrt{AQ^2 - AP^2} = \sqrt{\sqrt{192}^2 - 8^2}$$
$$= \sqrt{192 - 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

3. **(UNAS 2007)**
Perhatikan gambar kubus ABCD.EFGH berikut!



Jarak bidang ACH dan bidang EGB adalah ...
(A) $4\sqrt{3}$ cm
(B) $2\sqrt{3}$ cm
(C) 4 cm
(D) 6 cm
(E) 9 cm

Pembahasan: Kunci (D)



Jarak antara bidang ACH dengan EGB adalah panjang XY.

Rumus:

$$XY = \frac{1}{3} DE$$

DE = Diagonal ruang = $6\sqrt{3}\sqrt{3} = 18$ cm

Jadi, XY = $\frac{1}{3}$ DE = $\frac{1}{3}$. 18 = 6 cm

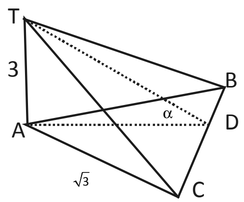
4. Bidang empat T.ABC, bidang TAB, TAC dan ABC saling tegak lurus. Jika TA = 3, AB = AC = $\sqrt{3}$ dan α adalah sudut antara bidang TBC dan ABC, maka $\sin\alpha$ adalah...

(A) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (D) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

(B) $\frac{\sqrt{14}}{7}$ (E) $\frac{\sqrt{42}}{7}$

(C) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Pembahasan: Kunci (E)



Bidang ABC, TAB dan TAC saling tegak lurus, maka:

ABC tegak lurus di A

TAC tegak lurus di A
TAB tegak lurus di A

$$TC = TB = \sqrt{3^2 + 3} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$$

$$BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$TD = \sqrt{TC^2 - BD^2} = \sqrt{12 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{42}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{42}$$

$$\sin\alpha = \frac{TA}{\frac{1}{2}\sqrt{42}} = \frac{3}{\frac{1}{2}\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

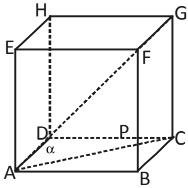
5. **(UNAS 2008)**
Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Jika sudut antara diagonal AG dengan bidang alas ABCD adalah α, maka $\sin\alpha$ adalah ...

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (E) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

(C) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Pembahasan: Kunci (C)



AG = $6\sqrt{3}$ cm (diagonal ruang)

AC = $6\sqrt{2}$ cm (diagonal bidang)

$$\sin\alpha = \frac{CG}{AG} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ .$$

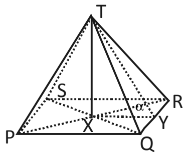
6. **(SNMPTN 2008)**

Suatu limas beraturan TPQRS dengan TP = TQ = TR = TS = $\sqrt{21}$ cm dan PQRS adalah suatu persegi dengan panjang sisi 6 cm. Besar sudut antara bidang TQR dan bidang alas sama dengan ....

(A) 30^{o} (C) 60^{o} (E) 90^{o}

(B) 45^{o} (D) 75^{o}

Pembahasan: Kunci (A)



Sudut antara bidang TQR dan bidang alas = α

Perhatikan Δ TUR!

$$TY = \sqrt{TR^2 - YR^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{21})^2 - (3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Perhatikan Δ TXY!

$$\text{Cos}\alpha = \frac{XY}{TY} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow \alpha = 30^o$

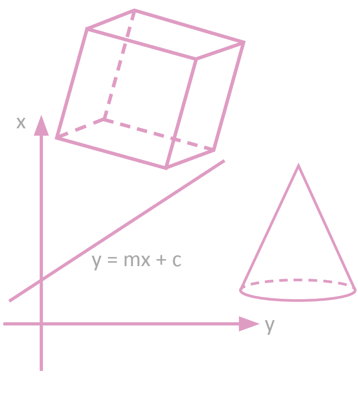
Jadi, besar sudut antara bidang TQR dan bidang alas adalah 30^o.

Bab 9

PERMUTASI, KOMBINASI, DAN PELUANG

Strategi Kebut Semalam

Matematika **SMA**



A. Aturan Pengisian Tempat yang Tersedia

1. Aturan Perkalian

Misalkan terdapat n tempat tersedia dengan:

- A_1 adalah banyak cara untuk mengisi tempat pertama
- A_2 adalah banyak cara untuk mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi
- A_3 adalah banyak cara untuk mengisi tempat ketiga setelah tempat pertama dan kedua terisi

...

...

- A_n adalah banyak cara untuk mengisi tempat ke-n setelah tempat pertama, kedua, ketiga, ..., ke (n-1) terisi

  Banyak cara untuk mengisi n tempat yang tersedia secara keseluruhan adalah:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ \ldots \times A_n$$

Contoh:

Banyaknya bilangan antara 1.000 sampai 4.000 yang dapat dibentuk oleh bilangan-bilangan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 adalah ...

Penyelesaian:

Akan dicari banyaknya bilangan antara 1.000 sampai 4000 yang dapat dibentuk oleh bilangan-bilangan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ada 7 buah bilangan). Menggunakan aturan perkalian diperoleh:

Ribuan	Ratusan	Puluhan	Satuan
3	6	5	4

- Angka 3 pada kolom ribuan diperoleh dari bilangan antara 1000 sampai 4000 mempunyai bilangan ribuan 1, 2, 3.

- Angka 6 pada kolom ratusan diperoleh dari 6 angka yang dapat dipakai, sebab 1 buah angka telah terpakai untuk kolom ribuan.
- Angka 5 pada kolom ratusan diperoleh dari 5 angka yang dapat dipakai, sebab 2 buah angka telah terpakai untuk kolom ribuan dan ratusan.
- Angka 4 pada kolom ratusan diperoleh dari 4 angka yang dapat dipakai, sebab 3 buah angka telah terpakai untuk kolom ribuan, ratusan, dan puluhan.

2. Aturan Penjumlahan

(m + n) cara yang berbeda digunakan jika m cara dan n cara itu tidak digunakan secara bersama.

3. Notasi Faktorial

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n \times 1) \times n$

$1! = 0! = 1$

dengan n bilangan asli

B. Permutasi

Permutasi dari sekumpulan unsur-unsur adalah cara penyusunan unsur-unsur tersebut yang berbeda dengan memerhatikan urutannya ($AB \neq BA$)

- Rumus dan notasi yang digunakan dalam permutasi adalah:
  a) Banyaknya permutasi n unsur yang diambil dari n unsur adalah:

  $$nPn = n!$$

  b) Banyaknya permutasi r unsur yang diambil dari n unsur adalah:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Permutasi k unsur dengan terdapat m unsur yang sama, n unsur yang sama dan o unsur yang sama adalah:

$$\frac{k!}{m!n!o!} \text{ cara}$$

Contoh:
Berapa banyak kata yang dapat disusun dari huruf-huruf MATEMATIKA?
Jawab:
Diketahui:
Banyak huruf penyusun MATEMATIKA = 10 huruf.
Banyak unsur yang sama:
Huruf M = 2 huruf
Huruf A = 3 huruf
Huruf T = 2 huruf
Banyak huruf yang dapat disusun adalah:

$$\frac{10!}{2!.3!.2!} = 5.6.7.8.9.10 = 151200 \text{ huruf}$$

- Banyaknya permutasi siklis (lingkaran) dari n unsur adalah:

$$(n - 1)!$$

Contoh:
Ada 5 orang akan duduk pada sebuah meja bundar untuk mengadakan rapat. Berapakah banyak cara duduk kelima orang tersebut?

Jawab:
Karena mereka duduk melingkar, maka kita gunakan rumus permutasi siklis. Banyak orang yang duduk

melingkar ada 5, maka banyak cara duduk kelima orang tersebut
= (n - 1)! = (5 - 1)! = 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

C. Kombinasi

Kombinasi dari sekumpulan unsur-unsur adalah cara penyusunan unsur-unsur tersebut yang berbeda tanpa memerhatikan urutannya (AB = BA).

- Kombinasi k unsur dari n unsur yang dilambangkan dengan:

  ${}_nC_k$, C_k^n atau $C\binom{k}{n}$

- Banyaknya kombinasi k unsur yang diambil dari n unsur adalah:

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} $$

D. Peluang Kejadian

Peluang kejadian adalah banyaknya kejadian yang diharapkan dibagi dengan banyaknya ruang sampel. Peluang kejadian A ditulis P(A), ditentukan dengan rumus:

$$ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} $$

n(S) = banyaknya anggota A semesta
n(A) = banyaknya anggota A
P(A) = peluang kejadian A

E. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Misalkan A^C adalah komplemen kejadian A, yaitu kejadian lain yang dapat terjadi selain kejadian A, maka peluang terjadinya kejadian A^C adalah:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Contoh:
Peluang Doni lulus ujian adalah 0,7. Maka peluang Adi tidak lulus adalah ...
Jawab:
$P\left(A^C\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$

F. Frekuensi Harapan Suatu Kejadian

Frekuensi harapan adalah harapan banyaknya muncul suatu kejadian dari sejumlah percobaan yang dilakukan. Bila banyaknya percobaan A dilambangkan n, maka banyaknya frekuensi harapan kejadian A adalah:

$$FH(A) = n \times P(A)$$

dengan FH(A) adalah frekuensi harapan kejadian A.

G. Peluang Kejadian Majemuk

1. **Gabungan Dua Kejadian**
   Untuk setiap kejadian A dan B berlaku
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
2. **Kejadian Saling Lepas**
   Dua kejadian A dan B dikatakan kejadian saling lepas bila A dan B tidak punya irisan, yang berakibat $P(A \cap B) = 0$, sehingga
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
3. **Kejadian Saling Bebas**
   A dan B disebut dua kejadian saling bebas bila kejadian yang satu tidak dipengaruhi kejadian lainnya.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

4. **Kejadian tidak saling bebas**
   Kejadian tidak saling bebas apabila kejadian yang satu memengaruhi kejadian lain.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$$

dengan: $P\left(\frac{B}{A}\right)$ = peluang terjadinya B setelah A terjadi.

Sifat-sifat peluang:

$$P\left((A \cup B)^c\right) = P\left(A^c \cap B^c\right)$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$P\left((A \cap B)^c\right) = P\left(A^c \cup B^c\right)$$
$$= 1 - P(A \cap B)$$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2009)**

   Suatu kata sandi yang terdiri dari 3 huruf hidup berbeda dan 3 angka berbeda dengan susunan bebas, akan disusun dari 5 huruf hidup dan angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Banyak kata sandi yang dapat disusun adalah ...

   (A) ${}_5C_3 \times {}_{10}C_3$
   (B) ${}_5C_3 \times {}_{10}C_3 \times 3! \times 3!$
   (C) ${}_5C_3 \times {}_{10}C_3 \times 6!$
   (C) $({}_5C_3 \times {}_{10}C_3) \times 3!$
   (D) $({}_5C_3 \times {}_{10}C_3) \times 6!$

   Pembahasan: Kunci (A)

   Dari soal diketahui bahwa: suatu kata sandi yang terdiri dari 3 huruf hidup berbeda dan 3 angka berbeda dengan susunan bebas, akan disusun dari 5 huruf hidup dan angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

   Artinya:

   Diambil 3 huruf dari 5 huruf dengan susunan bebas = ${}_5C_3$.

   Diambil 3 huruf dari 10 huruf dengan susunan bebas = ${}_{10}C_3$.

   Sehingga, banyak kata sandi yang dapat disusun adalah ${}_5C_3 \times {}_{10}C_3$.

3. **(SNMPTN 2008)**

   Pada percoban melempar dua buah dadu sekaligus, peluang munculnya jumlah mata dadu tidak lebih dari 6 adalah ...

(A) $\frac{5}{18}$ (C) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

Pembahasan: Kunci (C)

Pertanyaan "... tidak lebih dari 6" sama artinya dengan "... kurang dari atau sama dengan 6".

Misalkan:

A adalah kejadian munculnya jumlah mata dadu tidak lebih dari 6

A = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1),(4,2), (5,1)}

Jadi, n(A) = 15

Banyaknya anggota ruang sampel $n(S) = 6^2 = 36$

Peluang A adalah:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Dengan demikian, peluang munculnya jumlah mata dadu tidak lebih dari 6 adalah $\frac{5}{12}$.

4. **(UNAS 2005)**

Sebuah kotak terdapat 5 bola merah, 4 bola biru, dan 3 bola kuning. Dari dalam kotak diambil 3 bola sekaligus secara acak. Peluang terambil 2 bola merah dan 1 bola biru adalah ...

(A) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{4}{11}$

(B) $\frac{5}{36}$ (D) $\frac{2}{11}$

Pembahasan: Kunci (D)

Kombinasi peluang terambil 2 bola merah dari 5 bola ${}_5C_2$.

Kombinasi peluang terambil 1 bola biru dari 4 bola ${}_4C_1$.

Kombinasi peluang terambil 3 bola dari 12 bola ${}_{12}C_3$.

Misalkan A adalah peristiwa terambilnya 2 bola merah dan 1 bola biru, maka

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{C_2^5.C_1^4}{C_3^{12}}=\frac{\frac{5!}{3!\cdot(5-2)!}.\frac{4!}{3!\cdot(4-3)!}}{\frac{12!}{9!\cdot(12-9)!}}$$

$$=\frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}.\frac{4!}{3!\cdot 1!}}{\frac{12!}{9!\cdot 3!}}=\frac{4}{22}=\frac{2}{11}$$

5. Dari suatu kelas yang memiliki 120 siswa, 60 siswa di antaranya belajar Matematika, 50 siswa belajar Fisika, dan 20 siswa belajar keduanya. Jika dari kelas itu dipilih secara acak, maka peluang siswa yang belajar Matematika maupun Fisika adalah ...

(A) 0,25
(B) 0,5
(C) 0,75
(D) 0,8
(E) 0 ,2

Pembahasan: Kunci (C)

Peluang siswa belajar Matematika

$$P(M)=\frac{60}{120}=\frac{6}{12}$$

Peluang siswa belajar Fisika

$$P(F)=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

Peluang siswa belajar
Matematika dan Fisika

$$P(M \cap F) = \frac{20}{120} = \frac{2}{12}$$

Maka peluang siswa belajar Matematika maupun Fisika adalah:

$$\begin{aligned} P(M \cup F) &= P(M) + P(F) - P(M \cap F) \\ &= \frac{6}{12} + \frac{5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \end{aligned}$$

6. Dalam kotak I terdapat 4 bola merah dan 3 bola putih, sedangkan kotak II terdapat 7 bola merah dan 2 bola hitam. Dari setiap kotak diambil satu bola secara acak. Peluang terambilnya bola putih dari kotak I dan bola hitam dari kotak II adalah ...

(A) $\frac{28}{63}$ (D) $\frac{6}{63}$

(B) $\frac{21}{63}$ (E) $\frac{5}{63}$

(C) $\frac{}{63}$

Penyelesaian: Kunci (D)

A = Kotak I terdapat 4 bola merah dan 3 bola putih, maka:

Peluang terambilnya bola putih dari kotak I = P(A) = $\frac{3}{7}$. B = Kotak II terdapat 7 bola merah dan 2 bola hitam, maka peluang terambil bola hitam dari kotak II = $\frac{2}{9}$.

Ingat: A dan B disebut dua kejadian saling bebas bila kejadian yang satu tidak dipengaruhi kejadian lainnya.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

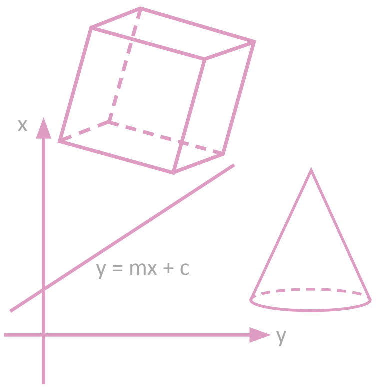
Sehingga peluang terambil bola putih pada kotak I dan hitam pada kotak II adalah:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{7}.\frac{2}{9} = \frac{6}{63}$$

Bab 10

STATISTIKA

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA



A. Definisi

Statistik adalah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan data, dan penarikan kesimpulan berdasarkan kumpulan data yang dilakukan.

Istilah-istilah dalam statistika:

- *Populasi* adalah himpunan dari seluruh anggota yang mempunyai sifat sama yang menjadi sasaran pengamatan.
- *Sampel* adalah bagian dari populasi yang diambil untuk dijadikan objek pengamatan langsung dan dapat dijadikan dasar dalam penarikan kesimpulan
- *Data* adalah keterangan yang diperoleh dari hasil pengamatan atau penelitian.
- *Datum* adalah bentuk tunggal dari data.

B. Ukuran Tendensi Pusat

1. Mean $(\overline{x})$

Mean disebut juga *rata-rata* atau *rataan*. *Mean* adalah jumlah seluruh data dibagi dengan banyaknya data.

- Data Tunggal

  Misalkan, sekumpulan *n* data terdiri atas x_1, x_2, x_3, x_4, . . ., x_n, maka meannya adalah:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

dengan:

$x_1, x_2, ..., x_n$ = nilai,
n = banyaknya nilai.

- Data Kelompok

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_n x_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

dengan:

$x_1, x_2, ..., x_n$ = titik tengah kelas ke-i,
f_i = frekuensi kelas ke-i.

Menghitung rata-rata dengan rata-rata sementara:

$$\overline{x} = \overline{x}_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i},$$

dengan:

$d_i = x_i - \overline{x}_0$

x_i = nilai tengah kelas ke-i
$\overline{x}_0$ = rata-rata sementara, dipilih pada kelas yang letaknya di tengah
f_i = frekuensi kelas ke-i.

2. Median (Me)

Median adalah *nilai tengah,* yaitu nilai data yang membagi data terurut menjadi dua bagian yang sama.

- Data Tunggal
  Jika n genap, maka median $M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$

  Jika n ganjil, maka median $M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$
- Data Kelompok

$$M_e = t_b + l\left(\frac{\frac{1}{2}n - F_k}{f}\right)$$

dengan:

t_b = tepi bawah kelas M_e
l = lebar atau panjang kelas M_e
n = jumlah seluruh frekuensi
F_k = frekuensi kumulatif kurang dari sebelum kelas M_e
f = frekuensi kelas M_e

3. Modus (Mo)

Modus adalah nilai yang paling banyak muncul dalam suatu data.

- Data Tunggal
  Nilai data yang paling banyak muncul.
- Data Kelompok

$$M_o = t_b + l\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

dengan:

t_b = tepi bawah kelas modus
l = lebar atau panjang kelas
d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sebelumnya

d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sesudahnya.

Hubungan rata-rata, median, dan modus:

$M_o = \overline{x} - 3\left(\overline{x} - M_d\right)$ atau $M_o = 3M_d - 2\overline{x}$.

C. Kuartil(Q)

Kuartil adalah nilai-nilai *x* yang membagi data menjadi **empat** bagian yang sama. Kuartil dilambangkan *Q*. Kuartil dibedakan menjadi tiga macam:

1) Kuartil bawah (Q_1)
2) Kuartil tengah/median (Q_2)
3) Kuartil atas (Q_3)

- **Data Tunggal**

  Cara menentukan kuartil sebagai berikut:
  - Urutkan data dari yang terkecil ke data terbesar.
  - Tentukan kuartil tengah (Q_2) atau median kumpulan data tersebut.
  - Tentukan Q_1. Caranya, bagilah data di bawah Q_2 menjadi dua bagian sama besar.
  - Tentukan Q_3. Caranya, bagilah data di atas Q_2 menjadi dua bagian sama besar.

    Jika n ganjil, maka Qj terletak pada urutan ke-$\frac{j}{4}\left(n+1\right)$.

    Jika n genap, maka Qj terletak pada urutan ke-$\frac{j}{4}n$ dan $\frac{j}{4}n+1$.

- **Data Kelompok**

$$Q_j = t_{bj} + l\left(\frac{\frac{j}{4}n - F_{kj}}{f_j}\right),$$

dengan:

t_{bj} = tepi bawah kelas Qj
l = lebar atau panjang kelas Qj
n = jumlah seluruh frekuensi
F_{k1} = frekuensi kumulatif kurang dari sebelum kelas Qj
F_1 = frekuensi kelas Qj

D. Ukuran Penyebaran (Dispersi)

	Data tunggal	Data kelompok
Range/ jangkauan (J)	x_{maks}-x_{min}	
Simpangan Rata-rata (SR)	$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \bar{x}\rvert}{n}$	$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$
Simpangan Baku /Standar Deviasi (S)	$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$	$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$
Ragam (R)	$R = S^2$	

Simpangan Kuartil (Q_d)	$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$
Hamparan (H)	$H = Q_3 - Q_1$

dengan:

x_i = nilai data ke-i

$\overline{x}$ = rata-rata

n = jumlah seluruh frekuensi.

x_i = nilai tengah kelas ke-i

f_i = frekuensi kelas ke-i

Soal dan Pembahasan

1. **(UM UGM 2008)**
   Tiga siswa kelas A, B, dan C berturut-turut terdiri dari 15 siswa, 10 siswa, dan 25 siswa. Rata-rata nilai gabungan dari ketiga kelas adalah 59,6. Jika rata-rata nilai kelas A dan kelas C berturut-turut 62 dan 60, maka rata-rata nilai kelas B adalah...
   (A) 50 (C) 61 (E) 65
   (B) 56 (D) 63

   Pembahasan: Kunci(A)

$$\text{Rata-rata}\left(\bar{x}\right) = \frac{\text{Jumlah Data}}{\text{Banyaknya Data}}$$

$$58{,}6 = \frac{15(62) + 10(B) + 2560}{15 + 10 + 25}$$

$$58{,}6(50) = 15(62) + 10(B) + 2560$$

$$B = 50$$

2. Jangkauan dan median dari data 21, 20, 19, 18, 17, 22, 22, 18, 17, 23, 24, 25 berturut-turut adalah ...
   A. 25 dan 21
   B. 25 dan 20
   C. 17 dan 21
   D. 8 dan 20,5
   E. 8 dan 20

   Pembahasan: (D)
   Urutan data adalah sebagai berikut:
   $17,17,\underset{Q_1}{\underline{18}},18,19,\underset{Q_2}{\underline{20,21}},22,22,\underset{Q_3}{\underline{23}},24,25.$

(Q_2) median $= \dfrac{20+21}{2} = 20{,}5$

Jangkauan $= X_{maks} - X_{min}$
$= 25 - 17 = 8$

4. **(UNAS 2009)**
   Nilai rata-rata dari data pada tabel berikut adalah ...

Nilai	Frekuensi
40 – 44	1
45 – 49	2
50 – 54	3
55 – 59	6
60 – 64	7
65 – 69	5
70 – 74	7
75 – 79	9

(A) 61 (C) 63 (E) 65
(B) 62 (D) 64

Pembahasan: Kunci (E)

Nilai	xi	fi	xi.fi
40 – 44	42	1	42
45 – 49	47	2	94
50 – 54	52	3	156
55 – 59	57	6	342
60 – 64	62	7	434
65 – 69	67	5	335
70 – 74	72	7	504

75 – 79	77	9	693
$\sum$		40	2600

$$\bar{x} = \frac{\sum xi.fi}{n} = \frac{2600}{40} = 65\cdot$$

5. **(UM UGM 2006)**
   Sumbangan rata-rata warga untuk korban bencana alam adalah Rp40.000,00. Jika sumbangan dari seorang warga bernama Ali digabungkan dalam kelompok warga tersebut, maka sumbangan rata-rata 26 warga sekarang menjadi Rp41.000,00. Hal ini berarti sumbangan Ali sebesar ...
   (A) Rp40.000,00
   (B) Rp57.000,00
   (C) Rp65.000,00
   (D) Rp66.000,00
   (E) Rp92.000,00
   Pembahasan: Kunci (D)
   Total sumbangan sebelumnya
   = (Rp40.000,00) x 25
   = Rp1.000.000,00
   Total sumbangan 26 warga
   = (Rp41.000,00) x 26
   = Rp1.066.000,00

   Jadi, sumbangan Ali besarnya
   =(Rp1.066.000,00)–(Rp1.000.000,00)
   = Rp66.000,00

6. Perhatikan tabel umur berikut!

Umur	F
4-7	6
8-11	10
12-15	18

16-19	40
20-23	16
24-27	10

Median dari data umur pada tabel di atas adalah ....

(A) 16,5 (C) 17,3 (E) 18,3
(B) 17,1 (D) 17,5

Pembahasan: Kunci (B)

Umur	F
4-7	
8-11	10
12-15	18
16-19	40
20-23	16
24-27	10
Total f	**100**

Kelas median

Kelas median (kelas yang memuat f ke 50), yaitu:

t_b = 15,5
c = 4
n = 100
f_k = 6 + 16 + 18 = 34
f_m = 40

$$M_e = t_b + i.\left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{f_m}\right) 15{,}5 + 4\left(\frac{\frac{100}{2} - 34}{40}\right)$$

$$= 15{,}5 + \left(\frac{50 - 34}{10}\right) = 15{,}5 + \left(\frac{16}{10}\right)$$

$$= 15{,}5 + 1{,}6 = 17{,}1$$

7. **(UNAS 2007)**

Perhatikan tabel berikut!

Berat (kg)	Frekuensi
31 – 36	4
37 – 42	6
43 – 48	9
49– 54	14
55 – 60	10
61 – 66	5
67 – 72	2

Modus pada tabel tersebut adalah ...

(A) 49,06 kg (D) 51,33 kg
(B) 50,20 kg (E) 51,83 kg
(C) 50,70 kg

Pembahasan: Kunci (E)

Tampak pada tabel bahwa kelas interval ke-4 mempunyai frekuensi paling besar, yaitu 14. Dengan demikian kelas interval ke-4 merupakan kelas modus.

$t_b = 49 - 0,5 = 48,5$
$b_1 = 14 - 9 = 5$
$b_2 = 14 - 10 = 4$
$p = 54,5 - 48,5 = 6$

Modus ditentukan dengan rumus:

$$M_o = t_b + \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right)p = 48,5 + \left(\frac{5}{5+4}\right)6$$

$$= 48,5 + \frac{5}{9}.6 = 48,5 + 3,33 = 51,83$$

Jadi, modus dari data di atas adalah 51,83 kg.

8. **(SNMPTN 2008)**

Nilai Ujian	4	5	6	8	10
Frekuensi	20	40	70	x	10

Dari tabel hasil ujian Matematika di atas, jika nilai rata-ratanya adalah 6, maka x = ...

(A) 0
(B) 5
(C) 10
(D) 15
(E) 20

Pembahasan: Kunci(E)

$$\overline{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f}$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{80 + 200 + 420 + 8x + 100}{140 + x}$$

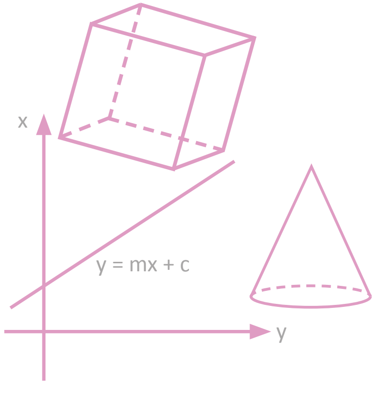
$\Leftrightarrow$ 840 + 6x = 800 + 8x

$\Leftrightarrow$ 2x = 40

$\Leftrightarrow$ x = 20

Bab 11

Lingkaran dan Persamaan Garis Singgung Lingkaran

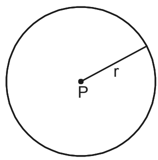


A. Definisi

Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang membentuk lengkungan tertutup dengan jarak titik-titik tersebut (jari-jari) terhadap suatu titik (titik pusat) adalah sama.

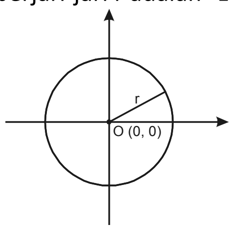
Persamaan umum lingkaran: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

- Pusat $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
- Jari-jari $R = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

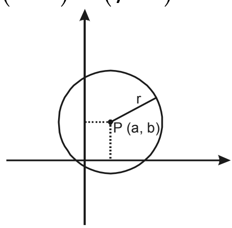


B. Persamaan-persamaan Lingkaran

- Persamaan lingkaran yang berpusat di titik O (0,0) dan berjari-jari r adalah $L:\ x^2 + y^2 = r^2$.
- Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P (a, b) dan berjari-jari r adalah $L:\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.



Pusat O(0, 0)



Pusat P(a, b)

- Persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) dan menyinggung garis px + qy + r = 0.

  $L: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

  Dengan:

  r = jarak titik (a,b) dengan garis px + qy + r = 0, yaitu

$$r = \left| \frac{ap + bq + r}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Rumus-rumus yang Mendukung

- Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Persamaan garis $g: ax + by + c = 0$ mempunyai gradien $m = -\frac{a}{b}$
- Persamaan garis dengan gradient m dan melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah:
  $y - y_1 = m(x - x_1)$
- Persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah:
  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
- Dua garis dengan gradien m_1 dan m_2 dikatakan sejajar jika $m_1 = m_2$
- Dua garis dengan gradien m_1 dan m_2 dikatakan saling tegak lurus jika $m_1.m_2 = -1$

C. Posisi Suatu Titik P(h,k) terhadap Lingkaran

Diketahui P(h, k).

1. Untuk persamaan $L: x^2 + y^2 = r^2$
   P(h, k) di dalam lingkaran jika $h^2 + k^2 < r^2$

P(h, k) pada lingkaran jika $h^2+k^2>r^2$

P(h, k) di luar lingkaran jika $h^2+k^2=r^2$

2. Untuk persamaan $L: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

   P(h, k) di dalam lingkaran jika
   $(h-a)^2+(k-b)^2<r^2$

   P(h, k) pada lingkaran jika
   $(h-a)^2+(k-b)^2>r^2$

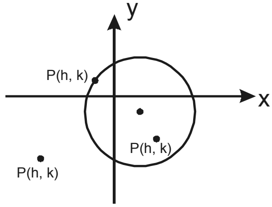
   P(h, k) di luar lingkaran jika
   $(h-a)^2+(k-b)^2=r^2$

3. Untuk persamaan $L: x^2+y^2+Ax+By+C=0$

   P(h, k) di dalam lingkaran jika
   $L: h^2+k^2+Ah+Bk+C<0$

   P(h, k) pada lingkaran jika
   $L: h^2+k^2+Ah+Bk+C>0$

   P(h, k) di luar lingkaran jika
   $L: h^2+k^2+Ah+Bk+C=0$



Posisi suatu titik P(h, k) terhadap lingkaran

D. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1. Melalui titik P(x_1, y_1) pada lingkaran

- Persamaan garis singgung lingkaran
  $L: x^2+y^2=r^2$ adalah:
  $x_1.x+y_1.y=r^2$

- Persamaan garis singgung lingkaran
  $L:\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ adalah
  $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$
- Persamaan garis singgung lingkaran
  $L:\ x^2+y^2+Ax+By+C=0$ adalah
  $x_1.x+y_1.y+A.\frac{1}{2}(x_1+x)+B.\frac{1}{2}(y_1+y)+C=0$

2. **Melalui titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran**
   Langkah-langkahnya:
   - Menentukan persamaan garis kutub titik $P(x_1, y_1)$
     a. $L: x^2+y^2=r^2$
        Persamaan garis kutubnya:
        $x_1.x+y_1.y=r^2$
     b. $L: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
        Persamaan garis kutubnya:
        $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$
     c. $L: x^2+y^2+Ax+By+C=0$
        Persamaan garis kutubnya:
        $x_1.x+y_1.y+A.\frac{1}{2}(x_1+x)+B.\frac{1}{2}(y_1+y)+C=0$
   - Mencari koordinat titik potong antara garis kutub dan lingkaran
   - Menentukan persaman garis singgung di titik potong antara garis kutub dan lingkaran

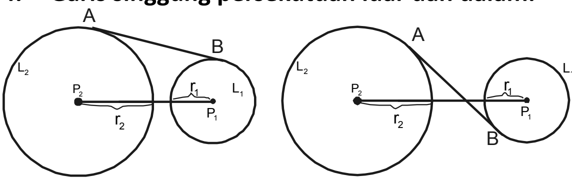
3. **Persamaan garis singgung lingkaran yang gradiennya (m) diketahui**
   a. $L: x^2 + y^2 = r^2$, persamaan garis singgungnya:

   $$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

   b. $L: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, persamaan garis singgungnya:

   $$y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

4. **Garis singgung persekutuan luar dan dalam.**



- Panjang tali busur persekutuan luar (AB) adalah $AB = \sqrt{P_1P_2{}^2 - (r_1 - r_2)^2}$
- Panjang tali busur persekutuan dalam adalah $AB = \sqrt{P_1P_2{}^2 - (r_1 + r_2)^2}$

E. Kedudukan Garis g terhadap Lingkaran L

Substitusi persamaan garis g ke lingkaran L kemudian akan didapatkan suatu persamaan kuadrat dengan $D = b^2 - 4ac$

Garis memotong lingkaran	Persamaan kuadrat memiliki	Diskriminan
Pada dua titik berlainan	Dua akar real berlainan	$D > 0$
Pada dua titik yang berimpit	Dua akar real yang sama	$D = 0$
Tidak pada satu titik pun	Akar-akarnya tidak real	$D < 0$

F. Hubungan antara Dua Lingkaran

Misalkan dua lingkaran L_1 dan L_2 berturut-turut mempunyai pusat P_1 dan P_2 dengan masing-masing jari-jarinya adalah r_1 dan r_2. Dimisalkan juga $r_2 > r_1$. Terdapat hubungan sebagai berikut:

1. Dua lingkaran L_1 dan L_2 sepusat, jika $P_1 = P_2$ atau $\left|P_1P_2\right| = 0$
   Dengan $\left|P_1P_2\right|$ merupakan jarak antara pusat P_1 dan P_2

2. Dua lingkaran L_1 dan L_2 bersinggungan dalam, jika $\left|P_1P_2\right| = \left|r_1 - r_2\right|$
   Dengan $\left|r_1 - r_2\right|$ merupakan selisih jari-jari r_1 dan r_2

3. Lingkaran L_1 berada di dalam lingkaran L_2 jika $\left|P_1P_2\right| \le r_2 - r_1$

4. Lingkaran L_1 berpotongan dengan lingkaran L_2 di dua titik jika $r_2 - r_1 \le \left|P_1P_2\right| \le r_1 + r_2$

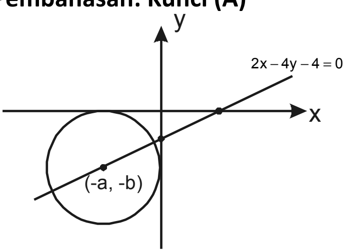
5. Dua lingkaran L_1 dan L_2 bersinggungan luar, jika $\left|P_1P_2\right| = r_1 + r_2$

6. Dua lingkaran L_1 dan L_2 tidak bersinggungan, jika $\left|P_1P_2\right| > r_1 + r_2$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2006)**
   Persamaan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis 2x – 4y – 4 = 0, serta menyinggung sumbu x negatif dan sumbu y negatif adalah ...
   (A) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
   (B) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$
   (C) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$
   (D) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
   (E) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

   Pembahasan: Kunci (A)



   Dari soal diketahui bahwa lingkaran menyinggung sumbu x negatif dan sumbu y negatif berarti lingkaran berada di kuadran III, dengan demikian pusatnya P(–a,–b) dan jari-jari lingkaran adalah $r = \left|-a\right| = \left|-b\right| = a = b$.

Pusat P(–a,–b) terletak di garis 2x – 4y – 4 = 0, maka:

$$2(-a)-4(-b)-4=0$$
$$\Leftrightarrow 2(-a)-4(-a)-4=0$$
$$\Leftrightarrow -2a+4a-4=0$$
$$\Leftrightarrow 2a=4 \Leftrightarrow a=2$$

Diperoleh a = 2 dan b = 2.

Dengan demikian pusatnya P(–2,–2) dan jari-jari r = 2.

Persamaan lingkaran berpusat di P(–2,–2) dan berjari-jari r = 2 adalah

$$(x-(-2))^2+(y-(-2))^2=2^2$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=4$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+4y+4=4$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+4y+4=0$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah

$x^2+y^2+4x+4y+4=0$.

2. **(SNMPTN 2005)**
   Jika lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 6y + c = 0$ menyinggung garis x = 2, maka nilai c adalah...

   (A)-7 (C)0 (E)12
   (B)-6 (D)6

Pembahasan: Kunci (A)

Lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 6y + c = 0$ menyinggung garis x = 2 berarti:

$2x^2 + y^2 + 6(2) + 6y + c = 0$

$y^2 + 6y + c + 16 = 0$

Syarat menyinggung: D = 0

$b^2 - 4ac = 0$

$\Leftrightarrow 36 - 4(1)(c + 16) = 0$

$\Leftrightarrow 36 - 4c - 64 = 0$

$\Leftrightarrow -4c = 28$

$\Leftrightarrow c = -7$

3. **(UN 2007)**

Salah satu persamaan garis singgung pada lingkaran $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13$ yang berabsis –1 adalah ...

(A) $3x - 2y - 3 = 0$
(B) $3x - 2y - 5 = 0$
(C) $3x + 2y - 9 = 0$
(D) $3x + 2y + 9 = 0$
(E) $3x + 2y + 5 = 0$

Pembahasan: Kunci (D)

$(-1-2)^2 + (y+1)^2 = 13$

$\Leftrightarrow (y+1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow (y+1) = \pm 2$

$\Leftrightarrow y = -3 \text{ atau } y = 1$

Jadi, titik (-1,-3) dan (-1,1) berada pada lingkaran

- Untuk titik (-1,-3)
  Garis singgungnya adalah:
  $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
  $\Leftrightarrow (-1-2)(x-2) + (-3+1)(y+1) = 13$
  $\Leftrightarrow -3x + 6 - 2y - 2 - 13 = 0$
  $\Leftrightarrow -3x - 2y - 9 = 0$
  $\Leftrightarrow 3x + 2y + 9 = 0$

- Untuk titik (-1,1)

$$\left(x_1-a\right)\left(x-a\right)+\left(y_1-b\right)\left(y-b\right)=r^2$$
$$\Leftrightarrow \left(-1-2\right)\left(x-2\right)+\left(1+1\right)\left(y+1\right)=13$$
$$\Leftrightarrow -3x+6+2y+2-13=0$$
$$\Leftrightarrow -3x+2y-5=0$$
$$\Leftrightarrow 3x-2y+5=0$$

4. **(UNAS 2008)**
Persamaan garis singgung melalui titik A(-2,-1) pada lingkaran $x^2+y^2+12x-6y+13=0$ adalah ...
(A) $-2x-y-5=0$
(B) $x-y+1=0$
(C) $x+2y+4=0$
(D) $3x-2y+4=0$
(E) $2x-y+3=0$

Pembahasan: Kunci (B)

Titik A(-2, -1) berada pada lingkaran $x^2+y^2+12x-6y+13=0$, karena

$$(-2)^2+(-1)^2+12(-2)-6(-1)+13$$
$$=4+1-24+6+13=0$$

Dengan menggunakan rumus diperoleh:

$$x_1.x+y_1.y+A.\frac{1}{2}\left(x_1+x\right)+B.\frac{1}{2}\left(y_1+y\right)+C=0$$
$$\Leftrightarrow (-2)x+(-1)y+12\cdot\frac{1}{2}\left(-2+x\right)+(-6)\frac{1}{2}\left(-1+y\right)+13=0$$
$$\Leftrightarrow -2x-y-12+6x+3-3y+13=0$$
$$\Leftrightarrow 4x-4y+4=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+1=0$$

5. Garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ di titik (–3,4) menyinggung lingkaran dengan pusat (10,5) dan jari-jari r. Nilai r = ...
(A)3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 12

Pembahasan: Kunci (E)

Titik (–3, 4) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 50$.
Jadi, garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ di titik (–3,4) adalah:
$-3x + 4y = 25 \Rightarrow 3x - 4y + 25 = 0$ .....(i)
Persamaan garis (i) menyinggung lingkaran dengan pusat (10,5), maka jari jari lingkaran yang dicari adalah jarak titik pusat (10,5) dengan persamaan garis (i).

$$r = \left|\frac{3(10) - 4(5) + 50}{\sqrt{9+16}}\right| = \left|\frac{30 - 20 + 50}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{60}{5}\right| = 12$$

6. **(UNAS 2009)**
Lingkaran $L \equiv (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ memotong garis y = 1. Persamaan garis singgung di titik potong lingkaran dan garis y = 1 adalah ...
(A) x = 2 dan x = 4
(B) x = 3 dan x = 1
(C) x = 1 dan x = 5
(D) x = 2 dan x = 3
(E) x = 3 dan x = 4

Pembahasan: Kunci (A)

Dari soal diketahui bahwa lingkaran
$L \equiv (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ memotong garis y = 1.
Titik potongnya:

$$(x-3)^2+(1-1)^2=1$$
$$(x-3)^2+0=1$$
$$(x-3)^2=1$$
$$x-3=\pm 1$$
$$x=4 \text{ atau } x=2$$

Dengan demikian diperoleh titik potong dengan garis y = 1 adalah (4,1) dan (2,1)

Persamaan garis singgung di titik (4,1):

$$(x-3)(4-3)+(x-1)(1-1)=1$$
$$(x-3)=1$$
$$x=4$$

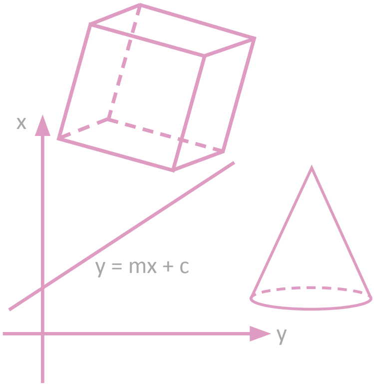
Persamaan garis singgung di titik (2,1):

$$(x-3)(2-3)+(x-1)(1-1)=1$$
$$(x-3)(-1)=1$$
$$x=2$$

Bab 12

SUKU BANYAK

Strategi Kebut Semalam
Matematika SMA



A. Pengertian Suku Banyak

Bentuk umum:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ ... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$

dengan:

x = variabel (peubah)

a_0 = suku tetap (konstanta)

$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ ...\ ,a_1,\ a_0$ = koefisien-koefisien suku banyak

n = bilangan cacah

Contoh:

$x^8 + 6x^5 + 2x + 10 \rightarrow$ suku banyak derajat 8

B. Nilai Suku Banyak

Misalkan

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ ... + a_1 x + a_0$

Nilai dari f(k) dapat dicari dengan:

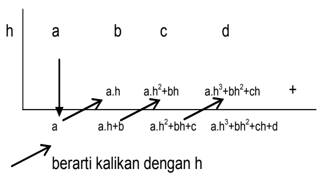
- Cara Substitusi

  Jika $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$, maka nilai suku banyak tersebut untuk $x = 1$ adalah:

  $f(1) = 3(1)^4 - 2.(1)^3 + 1 - 5 = -3$

- Skema Horner

  Jika $ax^3 + bx^2 + cx + d$ adalah suku banyak, maka f(h) diperoleh cara sebagai berikut:



Contoh:
Carilah $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$ tersebut untuk $x = 1$.

1	3	-2	1	-5
		3	1	2
	3	1	2	-3

Jadi, nilai $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$ tersebut untuk $x = 1$ adalah -3.

C. Operasi antara Suku Banyak

1. Penjumlahan, pengurangan, dan perkalian

Misalkan f(x) dan g(x) masing-masing merupakan suku banyak berderajat m dan n, maka:

- $f(x) \pm g(x)$ adalah suku banyak berderajat maksimum m atau n.
- $f(x).g(x)$ adalah suku banyak berderajat (m + n).

2. Kesamaan suku banyak (harus berderajat sama)

Misalkan:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

Maka:

$$f(x) \equiv g(x) \Leftrightarrow a_n = b_n , a_{n-1} = b_{n-1} , ..., a_1 = b_1 , a_0 = b_0$$

3. Pembagian Suku Banyak

Jika suatu suku banyak f(x) berderajat n dibagi oleh suku banyak g(x) berderajat kurang dari n, maka didapat suatu hasil bagi h(x) dan sisa pembagian s(x), secara matematis pembagian ini dapat ditulis:

$$\boxed{f(x) = h(x)\,g(x) + s(x)}$$

Ket:

f(x) = yang dibagi → berderajat n
g(x) = pembagi → berderajat k
h(x) = hasil bagi → berderajat (n – k)
s(x) = sisa → berderajat (k – 1)
Catatan: k < n

D. Teorema Sisa

- Suatu suku banyak f(x) jika dibagi (x – a), maka sisanya = f(a).
- Suatu suku banyak f(x) jika dibagi (x + a), maka sisanya = f(–a).
- Suatu suku banyak f(x) jika dibagi (ax – b), maka sisanya = $f\left(\frac{b}{a}\right)$
- Jika (x – a) habis dibagi/faktor dari suku banyak f(x), maka f(a) = 0.

E. Teorema Faktor

- Jika f(a) = S = 0, sehingga a merupakan pembuat nol suku banyak f(x), maka (x – a) adalah faktor dari suku banyak f(k).
- Jika pada suku banyak f(x) berlaku f(a) = 0, f(b) = 0 dan f(c) = 0, maka:
  f(x) habis dibagi (x – a) (x – b) (x – c).
- Jika (x – a) adalah faktor dari f(x), maka x = a adalah akar dari f(x).

F. Operasi Akar-akar pada Suku Banyak

1. Fungsi derajat tiga:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$
- $x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$

2. Fungsi derajat empat:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_3 = -\frac{b}{a}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$
- $x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$
- $x_1.x_2.x_3.x_4 = \frac{e}{a}$

Soal dan Pembahasan

1. Persamaan $2x^3 + px^2 + 7x + 6 = 0$ mempunyai akar $x = 2$. Jumlah ketiga akar persamaan itu adalah ....
   (A) -9 (C) 3 (E) 9
   (B) $2\frac{1}{2}$ (D) $4\frac{1}{2}$

   Pembahasan: Kunci (D)
   Persamaan $2x^3 + px^2 + 7x + 6 = 0$ mempunyai akar $x = 2$, maka:
   $$2(2)^3 + p(2)^2 + 7(2) + 6 = 0$$
   $$\Leftrightarrow 2.8 + p.4 + 14 + 6 = 0$$
   $$\Leftrightarrow 16 + 4p + 14 + 6 = 0$$
   $$\Leftrightarrow 4p + 36 = 0$$
   $$\Leftrightarrow p = -36$$
   $$\Leftrightarrow p = -9$$
   Persamaannya menjadi $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$
   Nilai
   $$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-9)}{2} = \frac{9}{2}$$

2. **(UNAS 2009)**
   Suatu suku banyak f(x) dibagi (x -1) sisa 2 dibagi (x – 2) sisa 3. Suatu suku banyak g(x) dibagi (x – 1) sisa 5 dibagi (x – 2) sisa 4.
   Jika h(x) = f(x).g(x), maka sisa pembagian h(x) oleh $x^2 - 3x + 2$ adalah ...

(A) $-2x+12$ (C)- $x+4$
(B) $-2x+8$ (D) $2x+8$
(E) $x + 4$

Pembahasan: Kunci (D)

- f(x) dibagi $x - 1$ sisa 2 dan g(x) dibagi $x - 1$ sisa 5,
  artinya h(x) = f(x).g(x) dibagi $x - 1$ sisanya 2.5 = 10.
- f(x) dibagi $x - 2$ sisa 3 dan(x) dibagi $x - 2$ sisa 4,
  artinya h(x) = f(x).g(x) dibagi $x - 2$ sisanya 3.4 = 12.

Misalkan sisa pembagian h(x) oleh $x^2 - 3x + 2$ adalah $px + q$

Karena $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, maka:

Sisa pembagian h(x) oleh

$(x - 1) = p.1 + q = 10$ ...(i)

Sisa pembagian $h(x)$ oleh

$(x - 2) = p.2 + q = 12$ ...(ii)

Eliminasi (i) dan (ii) diperoleh

$p = 2$ dan $q = 8$

Jadi, sisa pembagian h(x) oleh

$x^2 - 3x + 2$ adalah $2x + 8$.

3. **(SNMPTN 2009)**

   Salah satu faktor suku banyak
   $x^3 + kx^2 + x - 3$ adalah $x - 1$. Faktor yang lain adalah ...

   (A) $x^2 + 3x + 3$
   (B) $x^2 + x - 3$
   (C) $x^2 + 3x + 3$
   (D) $x^2 + 2x + 3$
   (E) $x^2 - 7x + 3$

Pembahasan: Kunci (D)

$(1) + k(1)^2 + (1) - 3 = 0$, diperoleh nilai

$k = 3 - 2 = 1$

Dengan pembagian suku banyak, diperoleh:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 3 \\
\hline
x - 1 & x^3 + x^2 + x - 3 \\
 & \underline{x^3 - x^2} \\
 & \quad 2x^2 + x \\
 & \quad \underline{2x^2 - 2x} \\
 & \qquad\quad 3x - 3 \\
 & \qquad\quad \underline{3x - 3} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Jadi, faktor lainnya adalah $x^2 + 2x + 3$.

4. **(UNAS 2008)**

Salah satu faktor suku banyak $P(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + n$ adalah $(x + 2)$. Faktor lainnya adalah ...

(A) $x - 4$
(B) $x + 4$
(C) $x + 6$
(D) $x - 6$
(E) $x - 8$

Pembahasan: Kunci (A)

Karena $(x + 2)$ merupakan faktor dari $P(x)$, maka $P(-2)=0$.

$P(-2) = 0$ berarti

$\Leftrightarrow (-2)^4 - 15(-2)^2 - 10(-2) + n = 0$

$\Leftrightarrow 16 - 15 \cdot 4 + 20 + n = 0$

$\Leftrightarrow n = 60 - 16 - 20 = 24$

Sehingga diperoleh:

$$P(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$$

Dengan metode Horner didapat:

$$\frac{x^4 - 15x^2 - 10x + 24}{x + 2} = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} x^4 - 15x^2 - 10x + 24 &= (x + 2)(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) \\ &= (x + 2)(x - 1)(x^2 - x - 12) \\ &= (x + 2)(x - 1)(x + 3)(x - 4) \end{aligned}$$

Jadi, faktor lain dari P(x) adalah (x – 4).

5. **(SPMB 2007)**
   Jika suku banyak $2x^3 - px^2 + qx + 6$ dan $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ mempunyai sisa sama apabila dibagi oleh x + 1, maka nilai p + q = ...

   (A) -2 (C) 0 (E) 2
   (B) -1 (D) 1

   Pembahasan: Kunci (C)
   Diketahui:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 - px^2 + qx + 6}{x + 1} \\ g(x) &= \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x + 1} \end{aligned}\right\} \text{sisanya sama}$$

   Dengan demikian diperoleh:
   f (-1) = g(-1)
   $\Leftrightarrow$ $2(-1)^3 - p(-1)^2 + q(-1) + 6 = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 1$
   $\Leftrightarrow$ -2 – p – q + 6 = -2 + 3 + 4 – 1
   $\Leftrightarrow$ 4 – 4 = p + q
   $\Leftrightarrow$ 0 = p + q

6. **(UNAS 2007)**
   Jika f(x) dibagi dengan (x – 2) sisanya 24, sedangkan jika f(x) dibagi dengan (2x – 3) sisanya 20. Jika f(x) dibagi dengan (x – 2) (2x – 3) sisanya adalah ...
   (A) 8x + 8
   (B) 8x – 8
   (C) – 8x + 8
   (D) – 8x – 8
   (E) – 8x + 6

   Pembahasan: Kunci (A)

   Dari soal diketahui $f(2)=24$ dan $f\left(\frac{3}{2}\right)=20$
   Misalkan s(x) = ax + b
   Dengan s(x) sisa pembagian f(x) oleh
   g(x) = (x – 2)(2x – 3)
   f(x) = h(x) g(x) + s(x)
   $\Leftrightarrow$ f(x) = h(x)(x – 2)(2x – 3)+(ax+b)
   Untuk x = 2
   f(2) = 0.h(x) + 2a + b
   $\Leftrightarrow$ 24 = 2a + b ....(i)
   Untuk $x=\frac{3}{2}$
   $$f\left(\frac{3}{2}\right)=0\cdot h(x)+\frac{3}{2}a+b$$
   $$\Leftrightarrow 20=\frac{3}{2}a+b\text{..........(ii)}$$
   Dari (i) dan (ii) didapat SPLDV
   $$\begin{array}{l} 24 = 2a + b \\ 20=\frac{3}{2}a+b \\ \hline 4=\frac{1}{2}a \Leftrightarrow a=8 \end{array} -$$

Didapat nilai b
$24 = 2a + b$
$\Leftrightarrow 24=2(8)+b$
$\Leftrightarrow b = 8$
Jadi, sisa penbagian adalah $s(x) = ax + b = 8x + 8$.

7. **(SNMPTN 2008)**
Nilai m + n yang mengakibatkan
$x^4 - 6ax^3 + 8a^2x^2 - ma^3x + na^4$ habis dibagi $(x - a)^2$
adalah ....

(A) 2 (C) 0 (E) -2
(B) 1 (D) -1

Pembahasan: Kunci (B)
Karena $x^4 - 6ax^3 + 8a^2x^2 - ma^3x + na^4$ habis dibagi $(x - a)^2$, maka sisa pembagiannya haruslah sama dengan nol.
Dengan menggunakan metode Horner, diperoleh:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x=a & 1 & -6a & 8a^2 & -ma^3 & na^4 \\
 & & a & -5a^2 & 3a^3 & (3-m)a^4 \\
\hline
 & 1 & -5a & 3a^2 & (3-m)a^3 & \boxed{(3-m+n)a^4 = 0}
\end{array}\;+$$

$$\begin{array}{c|cccc}
x=a & 1 & -5a & 3a^2 & (3-m)a^3 \\
 & & a & -4a^2 & -a^3 \\
\hline
 & 1 & -4a & -a^2 & \boxed{(3-m-1)a^3 = 0}
\end{array}\;+$$

- $(3 - m - 1)a^3 = 0$
$\Leftrightarrow 3 - m - 1 = 0$ atau $a = 0$
$m = 2$
- $(3 - m + n)a^4 = 0$
$\Leftrightarrow 3 - m + n = 0$ atau $a = 0$

$3 - 2 + n = 0$

$n = -1$

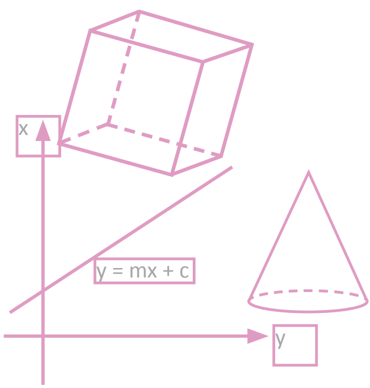
Dengan demikian,

$m + n = 2 + (-1) = 1$

Bab 13

Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA



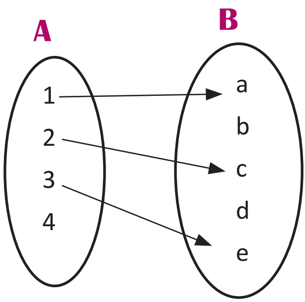
A. Definisi

Suatu fungsi f dari himpunan A ke B adalah relasi yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B ditulis $f : A \rightarrow B$.

Istilah-istilah dalam fungsi atau pemetaan:

- Domain adalah daerah asal atau daerah definisi fungsi itu.
- Kodomain adalah daerah kawan.
- *Range* atau daerah hasil adalah himpunan bagian dari daerah kawan atau kodomain.

Perhatikan gambar berikut!



A = Domain (daerah asal)
B = Kodomain (daerah lawan)
{a, b, c} = Range (daerah hasil)

Catatan: Tidak ada satu pun anggota asal yang terpetakan secara bercabang.

B. Jenis-jenis Fungsi

- **Fungsi onto (Surjektif)**

  Fungsi $f : A \rightarrow B$ onto, jika setiap anggota B mempunyai pasangan anggota A.

- **Fungsi satu-satu (Injektif)**

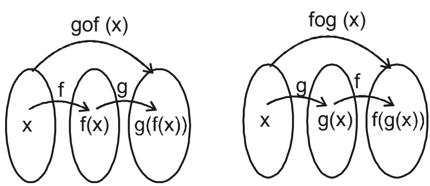
  Fungsi $f : A \rightarrow B$ satu-satu, jika setiap anggota B mempunyai pasangan anggota A hanya tepat satu saja.

- **Fungsi korespondensi satu-satu (Bijektif)**

  Fungsi $f : A \rightarrow B$ bijektif, jika fungsi tersebut surjektif dan injektif.

C. Komposisi Fungsi

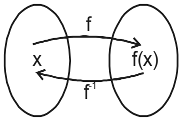
Misalkan diketahui fungsi-fungsi $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$. Komposisi dari fungsi f dan g adalah $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dan komposisi dari fungsi g dan f adalah $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.



Sifat-sifat komposisi fungsi:

- Tidak komutatif, $f \circ g \neq g \circ f$.
- Asosiatif, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- Sifat Identitas, $I \circ f = f \circ I = f$.
  Di mana I adalah fungsi identitas, yaitu I(x) = x

D. Invers Fungsi



Rumus fungsi invers adalah:

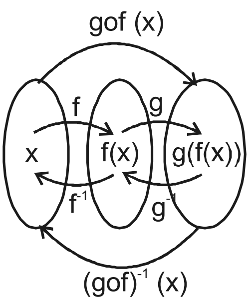
$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \, .$$

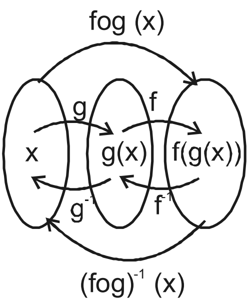
Sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = I(x)$

Rumus-rumus ringkas fungsi invers:

- $f(x) = ax + b \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}(x - b)$
- $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$
- $f(x) = \sqrt[n]{ax + b} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}\left(x^n - b\right)$

E. Invers Fungsi Komposisi





Sifat invers fungsi komposisi:

$$\left(f \circ g\right)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \text{ dan } \left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \, .$$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2007)**
   Diketahui fungsi f dan g yang dirumuskan oleh $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ dan $g(x) = 2x - 1$.
   Jika nilai $(f \circ g)(x) = 101$, maka nilai x yang memenuhi adalah ...

   (A) $3\frac{2}{3}$ dan -2

   (E) $-\frac{3}{11}$ dan -2

   (B) $-3\frac{2}{3}$ dan 2

   (D) $-3\frac{2}{3}$ dan -2

   (C) $\frac{3}{11}$ dan 2

   Pembahasan: Kunci (A)

   $(f \circ g)(x) = 101$
   $\Leftrightarrow f((g(x)) = 101$
   $\Leftrightarrow f(2x - 1) = 101$
   $\Leftrightarrow 3(2x - 1)^2 - 4(2x - 1) + 6 = 101$
   $\Leftrightarrow 3(4x^2 - 4x + 1) - 8x + 4 + 6 - 101 = 0$
   $\Leftrightarrow 12x^2 - 12x + 3 - 8x - 91 = 0$
   $\Leftrightarrow 12x^2 - 20x - 88 = 0$
   $\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 22 = 0$
   $\Leftrightarrow (3x - 11)(x + 2) = 0$
   $x = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ atau $x = -2$

2. **(UNAS 2006)**

Diketahui $f(x)=\frac{2-3x}{4x+1}, x\neq-\frac{1}{4}$. Jika f^{-1} adalah invers fungsi f, maka $f^{-1}(x-2)=$ ...

(A) $\frac{4-x}{4x-5}, x\neq\frac{5}{4}$

(B) $\frac{-x-4}{4x-5}, x\neq\frac{5}{4}$

(C) $\frac{-x+2}{4x+3}, x\neq-\frac{3}{4}$

(D) $\frac{x}{4x+3}, x\neq-\frac{3}{4}$

(E) $\frac{-x}{4x+5}, x\neq-\frac{5}{4}$

Pembahasan: Kunci (A)

$$f(x)=\frac{-3x+2}{4x+1}$$

Dengan menggunakan rumus invers diperoleh:

$$f(x)=\frac{-3x+2}{4x+1}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x+2}{4x+3}$$

Sehingga diperoleh:

$$f^{-1}(x-2)=\frac{-(x-2)+2}{4(x-2)+3}=\frac{-x+2+2}{4x-8+3}=\frac{-x+4}{4x-5}, x\neq\frac{5}{4}$$

3. **(SNMPTN 2007)**

Jika f(x) = $\sqrt{x+1}$ dan g(x) = $\frac{1}{x^2-1}$, maka daerah asal fungsi komposisi g o f adalah ....

(A) $-\infty < x < \infty$

(B) x > -1

(C) x < 0 atau x > 0

(D) -1 < x < 0 atau x > 0

(E) x < 0 atau x > 1

Pembahasan: Kunci (D)

f(x) = $\sqrt{x+1}$ dan g(x) = $\dfrac{1}{x^2-1}$

(g o f)(x) = g(f(x)) = g($\sqrt{x+1}$)

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1} = \frac{1}{(x+1)-1} = \frac{1}{x}$$

Sehingga (g o f)(x) = $\dfrac{1}{x}$, x ≠ 0

$D_{g\,o\,f}$ = {x > 0 atau x < 0} $\cap$ Df
= {x > 0 atau x < 0} dan x -1

Sehingga:

Jadi, $D_{g\,o\,f}$ = {-1 ≤ x < 0 atau x > 0).

4. **(UNAS 2005)**
Fungsi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ditentukan
$g(x)=x^2-x+3$ dan fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sehingga
$(f\circ g)(x)=3x^2-3x+4$.
Maka f (x – 2) = ...
(A)2x – 11 (D) 3x – 7
(B)2x – 7 (E) 3x – 11
(C)3x + 11

Pembahasan: Kunci (E)

$f(g(x))=3x^2-3x+4=3(x^2-x+3)-5=3(g(x))-5$

$f(x)=3x-5$

Maka, $f(x-2)=3(x-2)-5=3x-11$.

5. Jika $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ dan $g(x)=\dfrac{2}{3-x}$, maka $(f\circ g)^{-1}(x)=$ ...

(A) $\dfrac{3x-2}{2x-1}$

(B) $\dfrac{2x-1}{3x-2}$

(C) $\dfrac{5x-3}{x-1}$

(D) $\dfrac{x-1}{5x-3}$

(E) $\dfrac{3-x}{x-5}$

Pembahasan: Kunci (C)

$$f(g(x))=\frac{1}{\frac{2}{3-x}+1}=\frac{1}{\frac{2+3-x}{3-x}}=\frac{3-x}{5-x}$$

$$y=\frac{3-x}{5-x}$$

$$5y-xy=3-x$$

$$5y-3=xy-x$$

$$5y-3=x(y-1)$$

$$x=\frac{5y-3}{y-1}$$

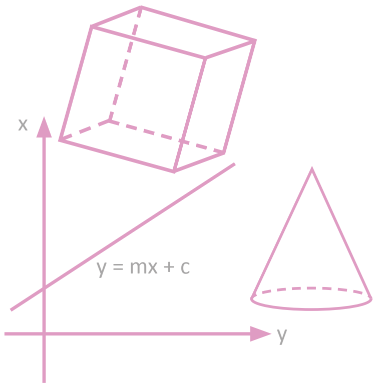
Jadi, inversnya adalah $(f\circ g)^{-1}(x)=\dfrac{5x-3}{x-1}$.

Bab 14

Limit

Strategi Kebut Semalam

Matematika SMA



Pengertian Limit

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ didefinisikan untuk x mendekati a tetapi $x \neq a$, maka nilai f mendekati L.

A. Teorema Limit

- Jika $f(x) = k$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$, maka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$
- Jika $f(x) = x$, maka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$
- $\lim\limits_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \{f(x) - g(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} k.f(x) = k.\lim\limits_{x\to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \{f(x).g(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} \left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to a} \{f(x)\}^n = \left\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\right\}^n$
- $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

B. Limit Fungsi Aljabar

1. Limit menuju nilai tertentu

Cara memperoleh nilai limit menuju nilai tertentu dapat menggunakan beberapa metode, yakni

- Metode langsung substitusi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- Metode pemfaktoran, setelah itu menggunakan metode langsung atau substitusi
- Aturan L'Hospital

2. Limit menuju tak berhingga

Perlu diperhatikan $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

- Bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+...+c}{px^m+qx^{m-1}+...+r}=K\text{ , maka:}$$

– Untuk n = m $\Rightarrow K=\frac{a}{p}$

– Untuk n > m $\Rightarrow L=\infty$

– Untuk n < m $\Rightarrow L=0$

- Mengalikan dengan faktor lawan

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right).\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$$

- Bentuk tak tentu $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}=K\text{ ,}$$

hasilnya:

$$a>p\Rightarrow L=+\infty$$

$$a=p\Rightarrow L=\frac{(b-q)}{2\sqrt{a}}$$

$$a<p\Rightarrow L=-\infty$$

C. Limit Fungsi Trigonometri

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\tan ax}=\frac{b}{a}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\tan ax}=\frac{b}{a}$

D. Kontinu dan Diskontinuitas

Suatu fungsi f dikatakan kontinu di titik x = a jika dipenuhi syarat-syarat berikut:

1. f(a) terdefinisi atau f(a) ada.
2. Limit f(x) ada.
3. Limit f(x) = f(a).

Contoh:

Diketahui fungsi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

Tentukan apakah fungsi tersebut kontinu pada titik!

Penyelesaian:

a. $f(1) = 2$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$

c. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2=f(a)$

Karena syarat a, b, c terpenuhi, maka f kontinu pada $x = 1$.

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2009)**

Nilai dari $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \ \ldots$

(A) $\dfrac{1}{18}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ E) 9

(B) $\dfrac{1}{9}$ (D) 6

Pembahasan: Kunci (C)

Gunakanlah cara pemfaktoran, diperoleh:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

2. **(SPMB 2007)**

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1} = \ldots$

(A)0 (C)2 (E)8

(B)1 (D)4

Pembahasan: Kunci (D)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)^2=4$$

3. **(UNAS 2009)**

Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+5x+5} - \sqrt{9x^2-7x-4} = \ldots$

(A) 0 (C) 1 (D) 2

(B) $\frac{1}{3}$ (E) 3

Pembahasan: Kunci (D)

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+5x+5} - \sqrt{9x^2-7x-4}$ merupakan limit bentuk tak tentu $\infty - \infty$ dengan a = p = 9, b = 5, dan q = -7.

Dengan menggunakan cara cepat diperoleh

$$L = \frac{(b-q)}{2\sqrt{a}} = \frac{5-(-7)}{2\sqrt{9}} = \frac{12}{2.3} = 2$$

4. **(UNAS 2009)**

Nilai $\lim\limits_{x\to\pi/3} \frac{\tan(3x-\pi)\cos 2x}{\sin(3x-\pi)} = \ldots$

(A) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (E) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Pembahasan: Kunci (B)

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{\tan(3x-\pi)\cos 2x}{\sin(3x-\pi)} = \lim_{x\to\pi/3} \frac{\tan(3x-\pi)}{\sin(3x-\pi)} . \lim_{x\to\pi/3} \cos 2x$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\tan(3x-\pi)}{\sin(3x-\pi)} . \cos 2.\pi/3$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\tan(3x-\pi)}{\sin(3x-\pi)} . \cos 120^o$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\tan(3x-\pi)}{\sin(3x-\pi)} . \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Misalkan:

$y = 3x - \pi$, untuk $x \to \pi/3$ maka $y \to 0$

Sehingga diperoleh,

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\tan(3x-\pi)}{\sin(3x-\pi)} \left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\tan y}{\sin y} \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

5. **(SNMPTN 2008)**

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}\pi} \frac{1 - 2\sin x . \cos x}{\sin x - \cos x} = \dots$$

(A) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (E) -1

(B) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (D) 0

Pembahasan: Kunci (D)

Bawa bentuk 1 – 2sin x . cos x ke dalam bentuk $(\sin x - \cos x)^2$.

$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x . \cos x + \cos^2 x$
$= \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x . \cos x$
$= 1 - 2\sin x . \cos x$

Dengan demikian

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{1-2\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin x-\cos x}$$

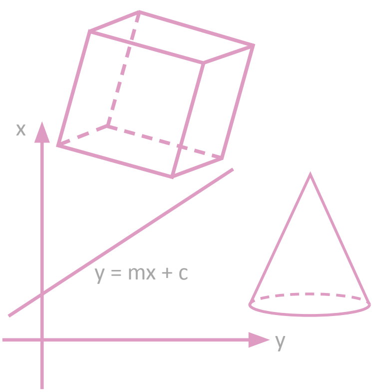
$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\sin x-\cos x=0$$

Bab 15

Turunan

Strategi Kebut Semalam

Matematika **SMA**



Definisi:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

A. Rumus-rumus Diferensial

1. Rumus-rumus turunan fungsi aljabar

a. Turunan suatu konstanta c
   Jika y = c, maka y’ = 0

b. Turunan perkalian fungsi dan konstanta
   Jika y = c f(x), maka y’ = c f’ (x)

c. Turunan penjumlahan/pengurangan fungsi.
   Jika y = u(x) $\pm$ v(x), maka
   y’ = u’(x) $\pm$ v’(x)

d. Turunan perkalian fungsi. Jika y = u(x).v(x), maka
   y’ = u’(x).v(x) + u(x) v’(x)

e. Turunan pembagian fungsi. Jika $y=\frac{u(x)}{v(x)}$

   maka $y'=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}$

f. Turunan fungsi komposisi (dalil rantai) jika
   y = f(g(x)) adalah:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

g. Jika f(x) = ax^n, maka f’(x) = a.n x^{n-1}

h. Jika $f(x)=\{u(x)\}^n$, maka

$$f(x) = n\{u(x)\}^{n-1} \cdot u'(x)$$

2. Rumus-rumus turunan fungsi trigonometri

a. $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$
b. $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$
c. $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$
d. $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = -\mathrm{cosec}^2 x$
e. $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x . \tan x$
f. $f(x) = \mathrm{cossec}\ x$, maka $f'(x) = -\mathrm{cosec}\ x . \mathrm{cotan}\ x$

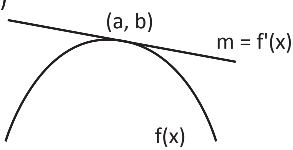
B. Turunan Kedua

Turunan kedua dari $y = f(x)$ dinotasikan dengan y'' atau $f''(x)$. Atau dengan notasi Leibniz, yaitu $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Turunan kedua diperoleh dengan cara menurunkan turunan pertama dari $y = f(x)$.

C. Penggunaan Turunan

1. Menentukan gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) pada kurva f(x)



Gradien(m): nilai turunan pertama f(x) ketika $x = x_1$, yaitu $m = f'(x_1)$
Persamaan garis singgungnya: $y - y_1 = m(x - x_1)$

2. Menentukan interval naik dan turun

- Fungsi f(x) naik jika $f'(x) > 0$
- Fungsi f(x) turun jika $f'(x) < 0$
- Fungsi f(x) stasioner jika $f'(x) = 0$

3. Keadaan stasioner

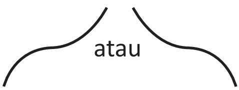
Bila keadaan stasioner terjadi di titik $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$, maka $f'(x_1) = 0$.
$y_1 = f(x_1)$ disebut nilai stasioner.

maks $(x_o, f(x_o))$ min $(x_o, f(x_o))$
Catatan:
Titik stationer sama artinya dengan titik puncak/ titik balik.

- **Uji turunan pertama untuk menentukan jenis ekstrem:**

	x < a	x= a	x > a
f(a) **nilai balik maksimum**	$f'(x) > 0$ f(x) naik	$f'(x) = 0$ f(x) stasioner	$f'(x) < 0$ f(x) turun
f(a) **nilai balik minimum**	$f'(x) < 0$ f(x) turun	$f'(x) = 0$ f(x) stasioner	$f'(x) > 0$ f(x) naik
x = a **titik belok**	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
	atau		
	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$

- **Uji turunan kedua untuk menentukan jenis ekstrem:**

No	Sketsa grafik fungsi	Tinjuauan turunan fungsi
1	Titik balik maksimum 	a. f’(a) = 0 b. f’ berubah tanda dari positif ke negatif c. f”(a) < 0
2	Titik balik minimum 	a. f’(a) = 0 b. f’ berubah tanda dari negatif ke positif c. f”(a) > 0
3	Titik belok 	a. f’(a) = 0 b. f’ tidak berubah tanda c. f”(a) = 0

Soal dan Pembahasan

1. **(UM UGM 2008)**

Jika $y = 3\sin 2x - 2\cos 3x$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \ldots$

(A) $6\cos 2x + 6\sin 3x$
(B) $-6\cos 2x - 6\sin 3x$
(C) $6\cos 2x - 6\sin 3x$
(D) $3\cos 2x + 2\sin 3x$
(E) $3\cos 2x - 2\sin 3x$

Pembahasan: Kunci (A)

Fungsi trigonometri tersebut mempunyai turunan:

$$y = 3\sin 2x - 2\cos 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\cos 2x)2 - 2(-\sin 3x)3$$

$$= 6\cos 2x + 6\sin 3x$$

2. **(UNAS 2008)**

Diketahui $f(x) = \frac{x^2+3}{2x+1}$. Jika f'(x) menyatakan turunan pertama f(x), maka f(0) + 2.f'(0) = ...

(A)–10 (C)–7 (E) –3

(B) –9 (D) –5

Pembahasan: Kunci (B)

Gunakan rumus turunan:

Jika $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, maka $y' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$

$$f(x) = \frac{x^2+3}{2x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1) - 2(x^2+3)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 6}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 6}{(2x+1)^2}$$

Selanjutnya:

$$f(0) = \frac{0^2+3}{2.0+1} = 3$$

$$f'(0) = \frac{2(0)^2 + 2.0 - 6}{(2.0+1)^2} = \frac{-6}{1} = -6$$

Sehingga diperoleh

$f(0) + 2.f'(0) = 3 + 2(-6) = 3 - 12 = -9$

3. **(UNAS 2009)**

Garis singgung di titik (2,p) pada kurva $y = 2\sqrt{x+2}$ memotong sumbu X di titik ...

(A) (–10, 0)

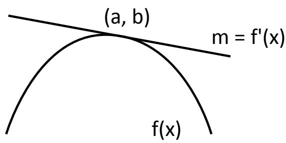
(B) (–6, 0)

(C) (–2, 0)

(D) (2, 0)

(E) (6, 0)

Pembahasan: Kunci (B)



Fungsi $y = 2\sqrt{x+2}$, turunannya adalah

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Garis singgung di titik (2,p) pada kurva

$y = 2\sqrt{x+2}$

memiliki gradien

$$m = f'(2) = \frac{1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2}.$$

Titik (2,p) melalui kurva $y = 2\sqrt{x+2}$, dengan demikian berlaku $p = 2\sqrt{2+2} = 4$.

Jadi, titik singgungnya (2,4).

Persamaan garis yang melalui titik (2,4) dengan gradien $m = \frac{1}{2}$ adalah $y - 4 = \frac{1}{2}(x-2)$.

Memotong sumbu X pada saat y = 0, maka berlaku

$$0-4=\frac{1}{2}(x-2)\Leftrightarrow x=-6\ .$$

Jadi, memotong sumbu X di titik (–6,0).

4. **(SNMPTN 2009)**

   Jika (a,b) adalah titik minimum grafik fungsi $f(x) = 7-\sqrt{25-x^2}$, maka nilai $a^2 + b^2$ adalah ...

   (A)4 (C)8 (E)13

   (B)5 (D)10

   Pembahasan: Kunci (A)

   $f(x) = 7-\sqrt{25-x^2}$ mempunyai titik stationer f'(x)= 0

   $$f'(x)=0\Leftrightarrow 0-\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=0\Leftrightarrow x=0$$

   Diperoleh x = 0 atau a = 0

   b = f(a) = f(0) = $7-\sqrt{25-0^2}$ = 2

   Jadi, $a^2 + b^2 = 0^2 + 2^2 = 4$.

5. **(UM UGM 2009)**

   Fungsi $f(x)=x^3+3kx^2-9k^2x-4$ turun dalam selang $-2<x<6$ jika k = ...

   (A)-1 (C) 1 (E) 3

   (B) -2 (D) 2

   Pembahasan: Kunci (B)

   Untuk menentukan interval turun atau naik dapat menggunakan turunan.

   $$f(x)=x^3+3kx^2-9k^2x-4$$

   Fungsi f(x) turun jika f'(x) < 0

$$f'(x) < 0$$
$$3x^2 + 6kx - 9k^2 < 0$$
$$x^2 + 2kx - 3k^2 < 0$$

Dalam selang tersebut, maka

$$(x+2)(x-6) < 0$$
$$x^2 - 4x - 12 < 0$$

Jadi, k = -2.

6. **(UNAS 2006)**

   Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal Vo m/detik. Tinggi peluru setelah t detik dinyatakan dengan fungsi $h(t) = 100 + 40t - 4t^2$. Tinggi maksimum yang dapat dicapai peluru tersebut adalah ...

   (A)160 m (C) 340 m (E) 800 m
   (B) 200 m (D) 400 m

   Pembahasan: Kunci (B)

   Soal tersebut menggunakan aplikasi turunan pertama.

   Ketinggian maksimum dicapai bila h'(t) = 0.

   $h'(t) = 40 - 8t = 0 \Leftrightarrow t = 5$.

   Ketinggian maksimum dicapai saat t = 5 detik.

   Untuk t = 5 detik, maka

   $$h(5) = 100 + 40(5) - 4(5)^2$$
   $$= 100 + 200 - 100 = 200$$

   Jadi, tinggi maksimum yang dapat dicapai peluru tersebut adalah 200 m.

7. **(SPMB 2007)**
Suatu proyek dapat dikerjakan selama p hari, dengan biaya setiap harinya $\left(4p + \frac{1500}{p} - 40\right)$ juta rupiah. Jika biaya minimum proyek tersebut adalah R juta rupiah, maka R = ...
(A)750 (C)1.170 (E)1.750
(B)940 (D)1.400
Pembahasan: Kunci (D)
Misal:
Biaya terhadap p hari = B(p)
Biaya minimum = R

$$B(p) = p\left(4p + \frac{1500}{p} - 40\right) = 4p^2 + 1500 - 40p$$

$$B'(p) = 0 \Leftrightarrow 8p - 40 = 0 \Leftrightarrow p = 5$$

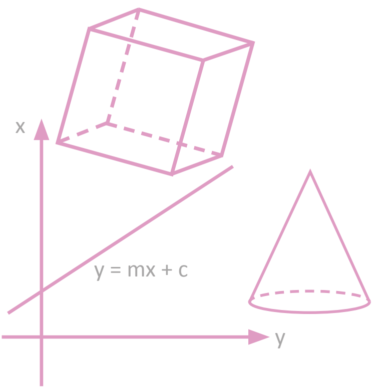
Sehingga diperoleh,
$R = B(5) = 4(52) + 1500 - 40(5) = 1400$

Bab 16

Program Linear

Strategi Kebut Semalam

Matematika SMA



Program linear adalah salah satu bagian dari ilmu matematika terapan yang digunakan untuk memecahkan berbagai persoalan sehari-hari. Program linear terdiri atas pertidaksamaan-pertidaksamaan linier yang mempunyai banyak penyelesaian, satu atau lebih memberikan hasil yang paling baik (penyelesaian optimum).

A. Menentukan Persamaan Garis

- Diketahui melalui titik (x_1, y_1) dan titik (x_2, y_2)

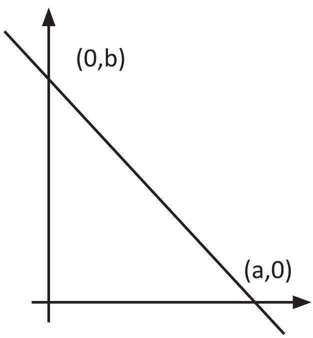
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- Diketahui melalui titik (x_1, y_1) dengan gradien m

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

- Diketahui titik (a,0) dan (0,b)

$$bx + ay = ab$$



B. Menentukan Himpunan Penyelesaian

Daerah (himpunan) penyelesaian pertidaksamaan $Ax + By + C \geq 0$ atau $Ax + By + C \leq 0$ dapat ditentukan sebagai berikut:

- Jadikan A (koefisien x) bernilai **positif**
- Jika tanda pertidaksamaan $\geq$, maka daerah penyelesaian di sebelah kanan garis $Ax + By + C = 0$.
- Jika tanda pertidaksamaan $\leq$, maka daerah penyelesaian di sebelah kiri garis $Ax + By + C = 0$.

C. Nilai Optimum Fungsi Obyektif

Hasil optimum terletak pada/di sekitar titik pojok atau pada garis batas daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan, dengan demikian nilai optimum (maksimum/minimum) fungsi objektif dapat ditentukan dengan:

- **Penggunaan Garis Selidik**

  Jika fungsi objektif $f(x,y) = Ax + By + C$, maka garis selidiknya adalah $Ax + By + C = k$
  - Nilai maksimum terjadi di titik pojok/garis batas paling kanan yang dilintasi garis selidik
  - Nilai minimum terjadi di titik pojok/garis batas paling kiri yang dilintasi garis selidik

- **Pengujian Titik Pojok**

  Jika fungsi objektif $f(x,y) = Ax + By + C$ disubstitusi dengan seluruh koordinat titik pojok, maka hasil yang terbesar/terkecil merupakan nilai optimum dari fungsi objektif tersebut.

Soal dan Pembahasan

1. **(SNMPTN 2007)**
   Untuk membuat barang A diperlukan 6 jam kerja mesin I dan 4 jam kerja mesin II, sedangkan untuk barang B diperlukan 4 jam kerja mesin I dan 8 jam kerja mesin II. Setiap hari kedua mesin tersebut bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari dapat menghasilkan x barang A dan y barang B, maka model matematikanya adalah sistem pertaksamaan ...
   (A) $6x + 4y \leq 18$, $2x + 8y \leq 18$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
   (B) $3x + 2y \leq 9$, $2x + 4y \leq 9$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
   (C) $2x + 3y \leq 9$, $4x + 2y \leq 9$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
   (D) $3x + 4y \leq 9$, $2x + 2y \leq 9$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
   (E) $2x + 3y \leq 9$, $2x + 4y \leq 9$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$
   Pembahasan: Kunci (B)
   Misalkan: Mesin A = x
   Mesin B = y

	A	B	
I	6	4	18
II	4	8	18

   $6x + 4y \leq 18 \Leftrightarrow 3x + 2y \leq 9$
   $4x + 8y \leq 18 \Leftrightarrow 2x + 2y \leq 9$
   $x, y \geq 0$

2. **(UNAS 2009)**
   Luas daerah parkir 360 m^2. Luas rata-rata sebuah mobil 6m^2 dan luas rata-rata bus 24 m^2. Daerah parkir tersebut dapat memuat paling banyak 30

kendaraan roda 4 (mobil dan bus). Jika tarif parkir mobil Rp2.000,00 dan tarif parkir bus Rp5.000,00, maka pendapatan terbesar yang dapat diperoleh adalah ...

(A) Rp40.000,00
(B) Rp50.000,00
(C) Rp60.000,00
(D) Rp75.000,00
(E) Rp90.000,00

Pembahasan: Kunci (E)

Misalkan: Banyak mobil = x
Banyak bus = y

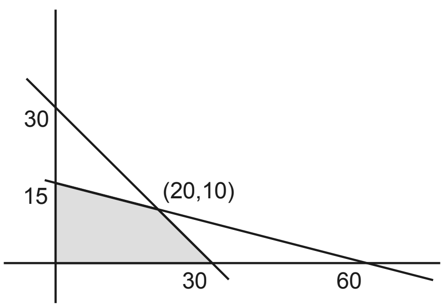
Berdasarkan soal dapat ditentukan model matematikanya

1. $6x + 24y \leq 360 \Rightarrow x + 4y \leq 60$
2. $x + y \leq 30$
3. $x, y \geq 0$

Fungsi tujuan untuk menentukan nilai maksimum dari

$Z = 2000x + 5000y$

Sistem pertidaksamaan di atas dapat disajikan dalam bentuk grafik berikut ini:



Untuk menentukan nilai maksimumnya, akan digunakan uji titik kritis/pojok

titik pojok F(x,y)	Z = 2000x + 5000y
(30,0)	Z=2000(30)+5000(0)=60000
(20,10)	Z=2000(20)+5000(10) =90000 (maksimum)
(0,15)	Z=2000(0)+5000(15)=75000

Jadi, pendapatan terbesar yang dapat diperoleh adalah Rp90.000,00

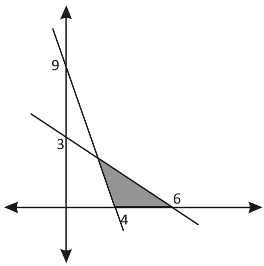
3. **(SNMPTN 2008)**

   Nilai maksimum dari P = 2x + 3y pada daerah $3x + y \geq 9$, $3x + 2y \leq 12$, adalah ....

   (A)6 (D)18
   (B)12 (E)27
   (C)13

   Pembahasan: Kunci (C)

   Daerah yang diarsir pada gambar berikut adalah daerah $3x + y \geq 9$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$



   Menentukan titik potong garis

   $3x + y = 9$ dan $3x + 2y = 12$

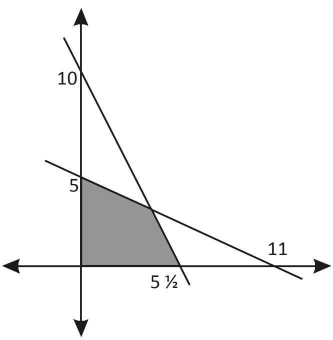
$$\begin{array}{rcll} 3x + y & = & 9 & \text{..............(i)} \\ \underline{3x + 2y} & \underline{=} & \underline{12} \; - & \text{............(ii)} \\ -y & = & -3 & \end{array}$$

Dengan mensubstitusi y = 3 pada persamaan (i) diperoleh x = 2, sehingga titik potong kedua garis adalah (2,3)

Titik pojok	P = 2x + 3y
(2,3)	P=2(2) + 3(3) =13
(3,0)	P=2(3) + 3(0) = 6
(4,0)	P=2(4) + 3(0) = 8

Jadi, nilai maksimum dari P = 2x + 3y adalah 13.

4. **(UNAS 2007)**
Daerah yang diarsir pada gambar di bawah merupakan himpunan penyelesaian dari suatu program linear. Nilai maksimum dari 3x + 4y adalah ...



(A) 20
(B) 24
(C) 28
(D) 30
(E) 32

Pembahasan: Kunci (B)
Persamaan garis yang melalui titik $\left(5\frac{1}{2},0\right)$ dan (0, 11) adalah:

$$\frac{y-0}{11-0}=\frac{x-5\frac{1}{2}}{0-5\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 11\left(x - 5\frac{1}{2}\right) = -5\frac{1}{2}y$$

$$\Leftrightarrow 11x - \frac{121}{2} = -\frac{11}{2}y$$

$$\Leftrightarrow 2x + y = 11$$

Persamaan garis yang melalui titik (10, 0) dan (0, 5) adalah:

$$\frac{y-0}{5-0} = \frac{x-10}{0-10}$$

$$\Leftrightarrow 5(x-10) = -10y$$

$$\Leftrightarrow 5x - 50 = -10y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 5$$

Titik potong kedua garis tersebut adalah:

$$\begin{array}{l} 2x + y = 11 \\ \underline{\frac{1}{2}x + y = 5} \; - \\ \frac{3}{2}x = 6 \end{array}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 3$$

Untuk menentukan nilai maksimumnya, akan digunakan uji titik kritis/pojok

Titik pojok	f(x,y) = 3x+ 4y
(0,0)	0
(5 ½, 0)	16 ½
(4,3)	24
(0,5)	29

Jadi, nilai maksimum dari 3x + 4y adalah 24.

5. Tempat parkir seluas 600 m^2 hanya mampu menampung 58 bus dan mobil. Tiap mobil membutuhkan tempat 6 m^2 dan bus 24 m^2. Biaya parkir tiap mobil Rp500,00 dan bus Rp750,00 jika tempat parkir penuh. Hasil dari biaya parkir maksimum adalah...

   (A) Rp18.750,00 (D) Rp43.500,00
   (B) Rp29.000,00 (E) Rp72.500,00
   (C) Rp32.500,00

   Pembahasan: Kunci (C)

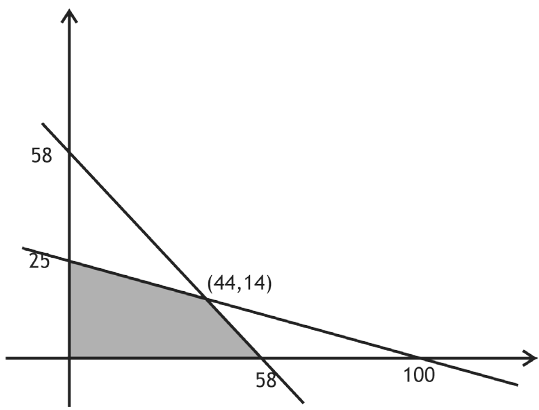
   Misal:

   Mobil = x dan bus = y

   Pembatas luas tempat parkir $6x + 24y \leq 600$

   Pembatas kapasitas tempat parkir $x + y \leq 58$

$$\begin{array}{r} x + 4y = 100 \\ x + y = 58 \\ \hline 3y = 42 \Rightarrow y = 14 \\ x = 44 \end{array}$$

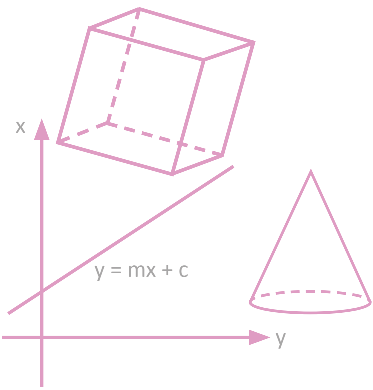


(0,25)	18.750
(58,0)	29.000
(44,14	32.500 (maks)

Bab 17

Integral

Strategi Kebut Semalam
Matematika **SMA**



A. Pengertian Integral

Integral adalah antiturunan, yaitu kebalikan dari turunan. Notasi integral adalah:

$$\int ...dx$$

yang dikenal dengan ***notasi Leibniz***.

B. Integral Tak Tentu

Integral tak tentu dari fungsi f(x) ditulis dengan $\int f(x)dx$ dan jika F'(x) = f(x), maka $\int f(x)dx = F(x) + C$, dengan C merupakan konstanta bilangan real.

1. Integral Fungsi Aljabar

Rumus-rumus integral antara lain:

- $\int k\ dx = kx + C$, C konstanta
- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, syarat $n \neq -1$
- $\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx + C$, C konstanta
- $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int f(x)dx$

Catatan:

$\int x^{-1} dx = \ln x + c$

2. Integral Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus integral antara lain:

a. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$

b. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$

c. $\int \tan x \, dx = \ln\left|\sec x\right| + C$

d. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

e. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

f. $\int \sin^{m} x \cos x dx = \frac{}{m \quad 1}\sin^{m \quad 1} x + C$

g. $\int \cos^{m} x \sin x \, dx = \frac{-1}{m+1}\cos^{m+1} x + C$

3. Integral Tentu

Diketahui fungsi f kontinu pada interval [a, b]. Jika F(x) merupakan integral dari f(x), maka

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Dengan a disebut batas bawah dan b disebut batas atas.

Rumus-rumus pada integral tentu sama dengan pada integral tak tentu dengan menggunakan batas-batasnya. Sifat-sifat integral tentu:

a. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \ a \le c \le b$

c. $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

d. $\int_a^a f(x)dx = 0$

4. Metode Penyelesaian Integral

a. Cara Substitusi

Terkadang, dalam menyelesaikan soal-soal integral, tidak bisa langsung digunakan rumus, akan tetapi harus melalui cara substitusi terlebih dahulu.

Contoh:

$$\int 3x^2\left(x^3-4\right)^3 dx = \ldots$$

Jawab:

Dengan substitusi:

$$u = x^3 - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow 3x^2dx = du$$

Diperoleh:

$$\int 3x^2\left(x^3-4\right)^3 dx = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^3-4\right)^4 + C$$

b. Integral Parsial

Rumus integral parsial:

$$\int u.dv = uv - \int v.du$$

Contoh:

Hitunglah: $\int x.\sin x dx$

Penyelesaian:

Misalkan:

$u = x \Rightarrow$ maka $du = dx$

$dv = \sin x\ dx \Rightarrow v = -\cos x$

Jadi,

$$\int x.\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Cara cepat:

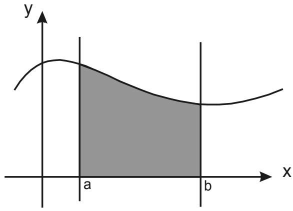
Turunkan	Integralkan
x	sinx
1	-cosx
0	-sinx

Diperoleh:

$$\int x.\sin x dx = -x\cos x - (1.-\sin x) + C$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

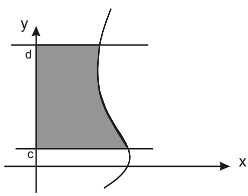
5. Menentukan Luas Daerah dengan Integral

- **Luas yang dibatasi oleh kurva dan sumbu x**



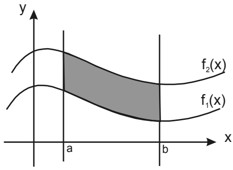
$$L = \int_a^b f(x)dx$$

- **Luas yang dibatasi oleh kurva dan sumbu y**



$$L = \int_c^d f(y)dy$$

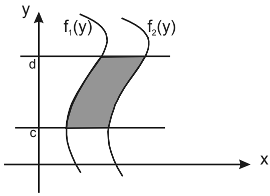
- **Luas yang dibatasi oleh dua buah kurva dan sumbu x**



$$L = \int_a^b \left(f(x)_{atas} - f(x)_{bawah}\right)dx$$

$$L = \int_a^b \left(f(x)_2 - f(x)_1\right)dx$$

- **Luas yang dibatasi oleh dua buah kurva dan sumbu y**

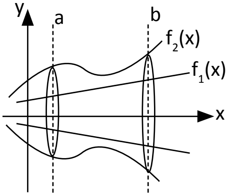


$$L = \int_c^d \left(f(y)_{kanan} - f(y)_{kiri}\right)dy$$

$$L = \int_c^d \left(f_2(y) - f_1(y)\right)dx$$

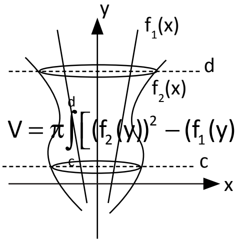
6. Menentukan Volume Benda Putar dengan Integral

- Jika $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ dua fungsi kontinu pada $a \le x \le b$, maka volume benda putar yang dibatasi oleh $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ bila diputar terhadap sumbu x.



$$V = \pi\int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right] dx$$

- Jika $f_1(y)$ dan $f_2(y)$ dua fungsi kontinu pada $c \le x \le d$ maka volume benda putar yang dibatasi oleh $f_1(y)$ dan $f_2(y)$ terhadap sumbu y



$$V = \pi \int_c^d \left[(f_2(y))^2 - (f_1(y))^2 \right] dy$$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2009)**

   Hasil $\int \cos^3 x \, dx$ adalah ...

   (A) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

   (B) $\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

   (C) $3\cos^2 x \sin x + C$

   (D) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + C$

   (E) $\sin x - 3\sin^3 x + C$

   Pembahasan: Kunci (A)

   Gunakanlah metode substitusi untuk mengerjakan integral tersebut, dan juga ingat rumus identitas, yakni:

   $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos x.\cos^2 x\,dx\\ &= \int \cos^2 x\,d(\sin x)\\ &= \int \left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x)\\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

2. **(UNAS 2009)**

Diketahui $\int_1^a (2x-3)dx = 12$ dan a > 0. Nilai a = ...

(A)2 (C) 5 (E) 10

(B) 3 (D) 7

Pembahasan: Kunci (C)

$$L = \int_1^a (2x-3)dx = 12$$

$$\left[x^2 - 3x\right]_1^a = 12$$

$$\left(a^2 - 3a\right) - \left(1^2 - 3.1\right) = 12$$

$$a^2 - 3a + 2 = 12$$

$$a^2 - 3a - 10 = 0$$

$$(a-5)(a+2) = 0$$

Diperoleh: a = 5 atau a = –2

3. **(SNMPTN 2009)**

Jika pada integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ disubstitusikan $\sqrt{x} = \sin y$, maka menghasilkan .....

(A) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 x.dx$

(B) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x.dx$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y.dy$

(E) $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x.dx$

Pembahasan: Kunci (C)

$\sqrt{x} = \sin\ y$ (Kuadratkan kedua sisi)

$\Leftrightarrow$ x = $\sin^2$ y

$\Leftrightarrow$ dx = 2 sin y. cos y dy

- Untuk x = 0 $\Rightarrow \sqrt{0} = \sin\ y$

  Diperoleh: y = 0

- Untuk x = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = \sin y$

  $\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin y$

  Diperoleh: y = $\frac{\pi}{4}$

Jadi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\ y}{\sqrt{1-\sin^2\ y}} 2\ \sin\ y.\cos\ y\ dy$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\sqrt{\cos^2\ y}} 2 \sin y \cdot \cos y\ dy$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y} 2 \sin y \cdot \cos y \, dy$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y \, dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 z \, dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx$$

4. **(UNAS 2008)**

Luas daerah yang dibatasi kurva $y = -x^2 + 4x$, sumbu x, garis x = 3, dan x = 1 adalah ...

(A) $3\frac{2}{3}$ satuan luas

(B) $5\frac{1}{3}$ satuan luas

(C) $7\frac{1}{3}$ satuan luas

(D) $9\frac{1}{3}$ satuan luas

(E) $10\frac{2}{3}$ satuan luas

Pembahasan: Kunci (C)

$$L = \int_1^3 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_1^3$$

$$= \left(-\frac{1}{3}.27 + 2.9\right) - \left(-\frac{1}{3} + 2\right)$$

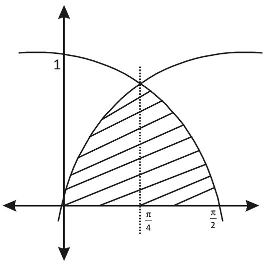
$$= (-9 + 18) - \left(-\frac{1}{3} + 2\right) = 9 - \frac{5}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Jadi, luasnya adalah $7\frac{1}{3}$ satuan luas.

5. **(SNMPTN 2007)**
   Luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi-fungsi y=sin x, y=cos x, dan sumbu x untuk $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ adalah ....

   (A) $\sqrt{2}-1$ (C) $2\sqrt{2}$ (E)2
   (B) $2-\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}-1$

   Pembahasan: Kunci (B)
   Dari grafik y=sin x, y=cos x diperoleh:



   Daerah yang diarsir adalah daerah yang dibatasi oleh y=sin x, y= cos x, dan sumbu x.
   Karena luas antara 0 dan $\frac{\pi}{4}$ dengan $\frac{\pi}{4}$ sampai $\frac{\pi}{2}$ sama (simetri), maka luas seluruhnya:

$$L = 2\int_0^{\pi/4} \sin x \, dx = 2\left[-\cos x\right]_0^{\pi/4}$$

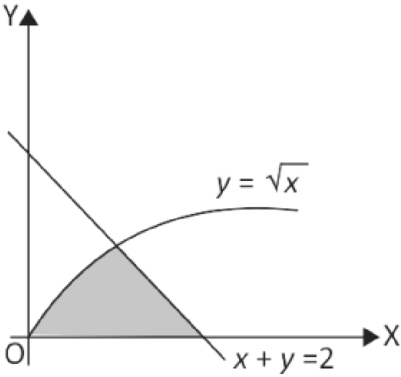
$$= 2\left\{-\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos\ 0)\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\right\}$$

$$= -\sqrt{2} + 2 = 2-\sqrt{2}$$

6. **(UNAS 2009)**

Daerah yang diarsir pada gambar diputar terhadap sumbu X, maka volume benda putar yang terjadi adalah ...



(A) $\frac{1}{6}\pi$ satuan volume

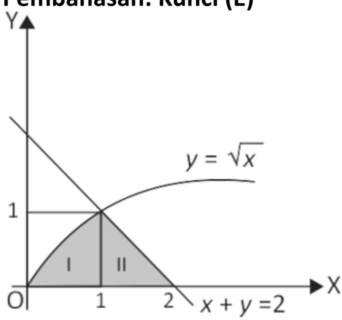
(B) $\frac{2}{6}\pi$ satuan volume

(C) $\frac{3}{6}\pi$ satuan volume

(D) $\frac{4}{6}\pi$ satuan volume

(E) $\frac{5}{6}\pi$ satuan volume

Pembahasan: Kunci (E)



Dari gambar tersebut, carilah volume benda I dan II.

Volume benda putar daerah I =

$$V_1 = \pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 x dx = \frac{\pi}{2}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Volume benda putar daerah II (Volume Kerucut) =

$$V_{II} = \frac{1}{3}\pi r^2.t = \frac{1}{3}\pi.1^2.1 = \frac{1}{3}\pi\ .$$

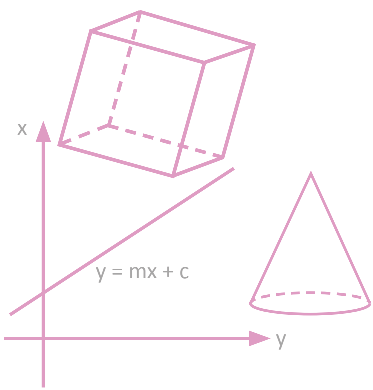
Dengan demikian volume benda putar yang terjadi adalah:

$$V_I + V_{II} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi\ .$$

Bab 18

Matriks

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA



Matriks adalah kumpulan elemen-elemen yang disusun dalam baris dan kolom.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dengan:

a_{11}: anggota matriks A pada baris ke-1 dan kolom ke-1

a_{m1}: anggota matriks A pada baris ke-m dan kolom ke-1

a_{1n}: anggota matriks A pada baris ke-1 dan kolom ke-n

a_{mn}: anggota matriks A pada baris ke-m dan kolom ke-n

Ordo dari matriks dinyatakan oleh banyaknya baris dan kolom. Pada matriks A, karena banyak baris = m dan banyak kolom = n,maka matriks A memiliki ordo m x n, dan dapat ditulis A_{mxn}.

A. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika:

- Ordonya sama
- Anggota yang seletak harus sama

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Jika A = B, maka

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$

B. Transpose Matriks

Transpose matriks A $= A^t = A^T$

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

C. Operasi pada Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Operasi penjumlahan dan pengurangan matriks berlaku jika ordo kedua matriks sama.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+u & b+v & c+w \\ d+x & e+y & f+z \end{pmatrix}$$

2. Perkalian Matriks dengan Skalar

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ maka } k \cdot A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}; \; k = \text{skalar}$$

3. Perkalian Matriks dengan Matriks

Dua buah matriks dapat saling dikalikan jika banyaknya kolom pada matriks pertama sama dengan banyaknya baris pada matriks kedua

$$\underbrace{A_{m\times n} \times B_{n\times p}}_{\text{Sama}} = C_{m\times p}$$

Contoh:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} ap+bs & aq+bt & ar+bu \\ cp+ds & cq+dt & cr+du \end{pmatrix}$$

Catatan:

Pada perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif: $AB \neq BA$

D. Determinan Matriks

Determinan hanya dimiliki matriks-matriks persegi (banyak baris dan kolom sama)

1. Determinan matriks berordo dua

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Determinan matriks A: $\det A = |A| = ad - bc$

2. Determinan matriks berordo tiga

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Determinan matriks B:

$$\det B = |B| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right|$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

3. Invers Matriks

Suatu matriks akan mempunyai invers jika determinannya tidak nol.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \text{Adj}(A)$$

Dengan Adj (A) = $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Catatan:

- Matriks A disebut matriks singular jika det A = 0
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
  Dengan I = matriks Identitas

$$I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2008)**
 Diketahui persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} a & 4 \\ -1 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 Nilai a + b + c + d = ...

 (A)–7 (C) 1 (E) 7

 (B) –5 (D) 3

 Pembahasan: Kunci (D)

$$\begin{pmatrix} a & 4 \\ -1 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2 & 4+b \\ -1+d & c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

 Dengan menggunakan kesamaan matriks, diperoleh:

$$\begin{aligned} a+2=-3 &\quad \Leftrightarrow a=-5 \\ 4+b=1 &\quad \Leftrightarrow a=-3 \\ c-3=3 &\quad \Leftrightarrow c=6 \\ -1+d=4 &\quad \Leftrightarrow d=5 \end{aligned}$$

 Jadi, a + b + c + d = – 5 – 3 + 6 + 5 = 3.

2. **(UM UGM 2007)**

 Apabila $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, A^t menyatakan transpose dari A dan A^{-1} menyatakan invers dari A, maka $A^t + A^{-1} =$ ...

(A) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (E) $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Pembahasan: Kunci (E)

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};\ A^t = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5-4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^t + A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

3. **(SPMB 2007)**

Jika A = $\begin{pmatrix} 2x+1 & x-1 \\ 3 & x \end{pmatrix}$,

maka jumlah semua nilai x, sehingga det A = 27 adalah ....

(A)1 (C) 3 (E) 5
(B) 2 (D) 4

Pembahasan: Kunci (A)

A = $\begin{pmatrix} 2x+1 & x-1 \\ 3 & x \end{pmatrix}$

Det A = 27

$\Leftrightarrow$ (x) (2x + 1) – (3) (x – 1) = 27

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3x + 3 = 27$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 3 = 27$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0$

Jumlah semua nilai x, yaitu:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

4. **(UNAS 2005)**

Matriks X berordo (2 $\times$ 2) yang memenuhi

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ adalah ...

(A) $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$

Pembahasan: Kunci (A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{4-6} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

5. **(UM UGM 2009)**

Jika x_1 dan x_2 memenuhi persamaan

$$\begin{vmatrix} 2x-3 & 3 \\ x & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix},$$

maka $x_1x_2 = \ldots$

(A)-12 (C) 0 (E) 12

(B) -6 (D) 6

Pembahasan: Kunci (D)

$$\begin{vmatrix} 2x-3 & 3 \\ x & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(2x-3)(x-2)-3x = 6-12$$

$$2x^2-10x+12=0$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$x_1 = 2$ atau $x_2 = 3$

Jadi, $x_1x_2 = 6$.

6. **(SNMPTN 2009)**

Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Serta B^T dan C^{-1} berturut-turut menyatakan transpose matriks B dan invers matriks C.

Jika det (AB^T) = k det (C^{-1}), dengan det (A) menyatakan determinan matriks A, maka nilai k adalah...

(A)10 (C) 4 (E) 1

(B) 8 (D) 2

Pembahasan: Kunci (C)

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det }(AB^T) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - ((-1) \times 1) = 1$$

$$\text{Det }(C) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (2 \times 1) = 4$$

$$\text{Adj }(C) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diperoleh invers matriks C:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det\ (C)} \times \text{Adj }(C)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kemudian nilai k dapat ditentukan

$$k = \frac{\det\ (AB^T)}{\det\ (C^{-1})}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{8}} = 4$$

7. **(SPMB 2007)**

Pada matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, jika bilangan positif 1, a, c membentuk barisan geometri berjumlah 13 dan bilangan positif 1, b, c membentuk barisan aritmetika, maka det A = ...

(A)17 (C) -1 (E) 22
(B) 6 (D) -6

Pembahasan: Kunci (D)

Diketahui: $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$

Deret geometri 1, a, c dengan
$1 + a + c = 13$ dan $a, c > 0$.

Rasio $r = \frac{a}{1} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow r = a^2 = c$

Sehingga $1 + a + a^2 = 13$
$\Leftrightarrow a^2 + a - 12 = 0$
$\Leftrightarrow (a - 3)(a + 4) = 0$
$\Leftrightarrow a = 3$ atau $a = -4$

$a = -4$ bukan penyelesaian karena a dan c bilangan posistif, sehingga untuk $a = 3$, maka $c = 9$.

Barisan aritmetika 1, b, c

Selisih $= b - 1 = c - b$

$\Leftrightarrow 2b = c + 1$

Diketahui $c = 9$, sehingga diperoleh:

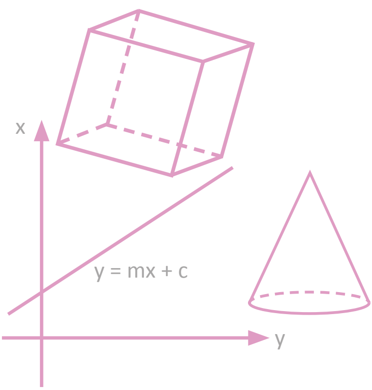
$2b = 9 + 1 \Leftrightarrow b = 5$

$$\begin{aligned} \text{Det } A &= (1)(c) - (b)(a) \\ &= (1)(9) - (5)(3) \\ &= 9 - 15 = -6 \end{aligned}$$

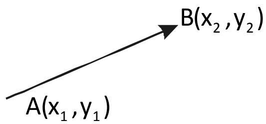
Bab 19

Vektor

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA

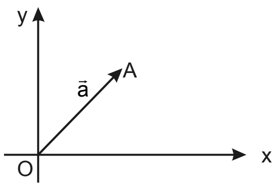


Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.
Notasi vektor: $\vec{a}$ dibaca "*Vektor a*".
Vektor dengan titik pangkal A dan ujungnya (terminus) B ditulis dengan $\overrightarrow{AB}$ dan dibaca "*Vektor AB*". Secara geometris, vektor AB dapat digambarkan dengan:

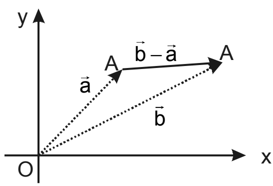


$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(x_2 - x_1 , y_2 - y_1\right)$$

Vektor posisi adalah vektor dengan titik pangkalnya adalah pusat koordinat. Vektor posisi dari titik A adalah $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

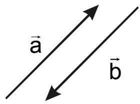


Sehingga dari definisi vektor posisi $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.
Secara geometris dapat digambar:



- Dua vektor dikatakan sama jika mempunyai besar dan arah yang sama.

- Vektor negatif adalah vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor positif.



$$\vec{a} = -\vec{b}$$

- Panjang anak panah disebut dengan besar vektor atau modulus. Misalkan A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2), maka panjang vektor AB adalah:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A. Operasi-operasi pada Vektor

Diketahui vektor posisi A atau $\vec{a}$ di dimensi 3 dengan $A(a_1, a_2, a_3)$. Maka vektor posisi $\vec{a}$ dapat ditulis dengan:

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Panjang vektor $\vec{a}$ dinotasikan sebagai:

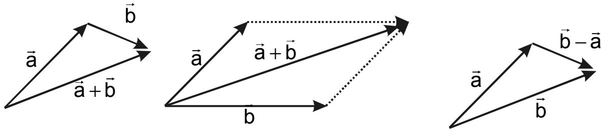
$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

- Jika $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Jika $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$



- Jika k adalah skalar, dan $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, maka $k\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$

  Jika k > 0, maka $k\vec{a}$ searah dengan $\vec{a}$.

  Jika k < 0, maka $k\vec{a}$ belawanan arah dengan $\vec{a}$.

B. Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang besarnya satu satuan.

– vektor satuan searah sumbu x adalah $\vec{i}=(1,0,0)$

– vektor satuan searah sumbu y adalah $\vec{j}=(0,1,0)$

– vektor satuan searah sumbu z adalah $\vec{k}=(0,0,1)$

Misalkan $\vec{e}$ adalah vektor satuan dari $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$.

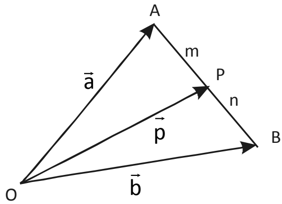
Vektor satuan dari $\vec{a}$ adalah: $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, dengan:

$$\vec{e}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}\right)$$

Atau

$$\vec{e}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}\vec{i}+\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}\vec{j}+\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}\vec{k}$$

C. Rumus Pembagian Ruas Garis



Jika $\vec{p}$ adalah vektor posisi dari titik P yang membagi garis AB dengan perbandingan $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = m : n$, maka

$$\vec{p} = \frac{m.\vec{b} + n.\vec{a}}{m+n}$$

D. Perkalian Titik/Skalar/Dot Product

- Diketahui $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

- Diketahui $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ dan $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$, maka

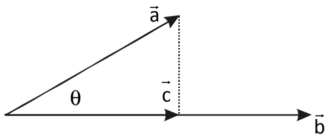
$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta$$

sehingga

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

E. Proyeksi

Bila $\vec{c}$ adalah vektor proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$, maka:



- Besar $\vec{c}$ (panjang vektor proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$)

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

- Vektor $\vec{c}$ proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \left[\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right].\vec{b}$$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2007)**
   Diketahui segitiga PQR dengan P(0,1,4), Q(2, –3,2), dan R(–1,0,2). Besar sudut PRQ = ...
   (A) 120^o (C) 60^o (E) 30^o
   (B) 90^o (D) 45^o

Pembahasan: Kunci (B)

$$\overrightarrow{RP} = P - R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{RP}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{RQ} = Q - R = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{RP}\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Misal $\angle PRQ = \theta$, maka

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{RP}.\overrightarrow{RQ}}{\left|\overrightarrow{RP}\right|.\left|\overrightarrow{RQ}\right|} = \frac{(1,1,2).(3,-3,0)}{\sqrt{6}.3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1.3 + 1.(-3) + 2.0}{\sqrt{6}.3\sqrt{2}} = \frac{0}{6\sqrt{3}} = 0$$

$$\angle PRQ = \theta = 90^0$$

Jadi, besar sudut PRQ adalah 90°.

2. Diketahui $\bar{a} = 3i - 2j$, $\bar{b} = -i + 4j$, $\bar{r} = 7i - 8j$. Jika, $\bar{r} = k\bar{a} + m\bar{b}$

maka k + m = ...

(A) 3 (C) 1 (E) -2

(B) 2 (D) -1

Pembahasan: Kunci (C)

$$\begin{aligned} \bar{r} &= k\bar{a} + m\bar{b} \\ &= (3k, -2k) + (-m, 4m) \\ &= (3k - m, -2k + 4m) \end{aligned}$$

Didapat:

3k – m = 7; -2k + 4m = -8

Sehingga:

$3k - m = 7 \Rightarrow m = 3k - 7$ .....(i)

Substitusikan (i) ke dalam $-2k + 4m = -8$

Sehingga:

$$-2k + 4(3k - 7) = -8$$
$$10k - 28 = -8$$
$$10k = 20$$
$$k = 2$$
$$m = 3k - 7$$
$$m = 3(2) - 7 = -1$$

Jadi, $k + m = 2 + (-1) = 1$

3. **(SNMPTN 2005)**

Diketahui vektor satuan $\vec{u} = 0{,}8\vec{i} + a\vec{j}$. Jika vektor $\vec{v} = b\vec{i} + \vec{j}$ tegak lurus $\vec{u}$, maka ab = ...

(A) $-\frac{18}{20}$ (C) $-\frac{12}{20}$ (E) $-\frac{8}{20}$

(B) $-\frac{15}{20}$ (D) $-\frac{9}{20}$

Pembahasan: Kunci (D)

$\vec{u} = 0{,}8\vec{i} + a\vec{j}$

$\vec{v} = b\vec{i} + \vec{j}$

Vektor $\vec{v}$ tegak lurus vektor $\vec{u}$, maka

$\vec{v} \cdot \vec{u}$ = ($0{,}8\vec{i} + a\vec{j}$) . ($b\vec{i} + \vec{j}$) = 0

0,8b + a = 0 ....(i)

- $\vec{u}$ adalah vektor satuan, maka $|\vec{u}| = 1$

$$\sqrt{(0,8)^2 + a^2} = 1$$
$$0,64 + a^2 = 1$$
$$a^2 = 3$$
$$a = 0,6 \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

- Substitusikan persamaan (ii) ke (i)

$$0,8b + 0,6 = 0$$
$$0,8b = -0,6$$
$$b = 0,75$$

$$ab = 0,6 \times -0,75 = -0,45 = -\frac{9}{20}$$

4. **(UNAS 2008)**

Diketahui vektor $\vec{a} = 2t\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -t\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, dan $\vec{c} = 3t\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$. Jika vektor $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ tegak lurus vektor $\vec{c}$, maka nilai 2t = ...

(A) -2 atau $\frac{4}{3}$

(B) 2 atau $\frac{4}{3}$

(C) 2 atau $-\frac{4}{3}$

(D) 3 atau 2

(E) -3 atau 2

Pembahasan: Kunci (A)

DIketahui $\vec{a} = 2t\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -t\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, dan $\vec{c} = 3t\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(2t\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)+\left(-t\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}\right)=t\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

Karena $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ tegak lurus vektor $\vec{c}$, maka $\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\vec{c}=\cos 90^0=0$.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=t\cdot 3t+1\cdot t+(-2)\cdot 1=0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2+t-2=0$$

$$\Leftrightarrow (3t-2)(t+1)=0$$

$$t=\frac{2}{3}\text{ atau } t=-1$$

Jadi, $2t=\dfrac{4}{3}$ atau $2t=-2$.

5. **(UNAS 2009)**

Diketahui titik A (3, 2, - 1), B (2,1,0) dan C(-1, 2, 3). Jika $\overrightarrow{AB}$ wakil vektor $\vec{u}$ dan $\overrightarrow{AC}$ wakil $\vec{v}$, maka proyeksi vektor $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ adalah ...

(A) $\frac{1}{4}\left(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}\right)$

(B) $-\bar{i}+\bar{k}$

(C) $4\left(\bar{i}+\bar{k}\right)$

(D) $4\left(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}\right)$

(E) $8\left(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}\right)$

Pembahasan: Kunci (B)

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,-1,1)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-4,0,4)$$

Maka, proyeksi vektor $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ adalah

$$\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}.\vec{v} = \frac{(-1)(-4)+1.0+1.4}{\left|\sqrt{(-4)^2+(4)^2}\right|^2}(-4,0,4)$$

$$= \frac{8}{32}(-4,0,4) = (-1,0,1) = -\hat{i}+\hat{k}$$

6. **(UM UGM 2008)**

Panjang proyeksi vektor (a,5,–1) pada vektor (1,4,8) adalah 2, maka a = ...

(A) 6 (C) 4 (E) 2

(B) 5 (D) 3

Pembahasan: Kunci (E)

$$\frac{(a,5,-1)(1,4,8)}{\sqrt{1+16+64}} = 2$$

$$\frac{a+20-8}{\sqrt{81}} = 2$$

$$\frac{a+12}{9} = 2$$

$$a+12 = 18$$

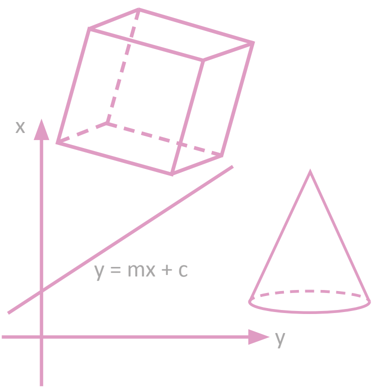
$$a = 6$$

Bab 20

Transformasi Geometri

Strategi Kebut Semalam

Matematika SMA

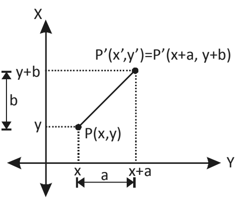


Jika suatu transformasi dapat disajikan sebagai matriks $M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka $P(x,y) \xrightarrow{M_T} P'(x',y')$

dengan $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

A. Translasi

Translasi atau disebut juga dengan pergeseran adalah pemindahan suatu titik sepanjang garis lurus dengan arah dan jarak tertentu.



Jika sembarang titik P(x,y) ditranslasi dengan matriks $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

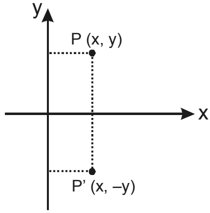
Sehingga $P'(x+a, y+b)$.

B. Refleksi/Pencerminan

- Pencerminan titik P(x,y) terhadap sumbu x menghasilkan bayangan P'(x, –y).

  $$P(x,y) \xrightarrow{\text{sumbu x}} P'(x,-y).$$

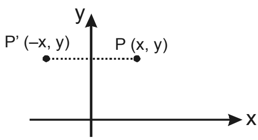
  Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



- Pencerminan titik P(x,y) terhadap sumbu y menghasilkan bayangan P’(–x,y).

$$P(x,y) \xrightarrow{\text{sumbu y}} P'(-x,y).$$

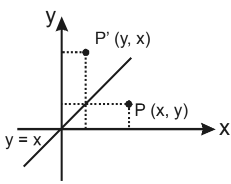
Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



- Pencerminan titik P(x,y) terhadap sumbu y = x menghasilkan bayangan P’(y,x)

$$P(x,y) \xrightarrow{\text{garis y=x}} P'(y,x).$$

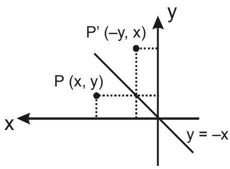
Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



- Pencerminan titik P(x,y) terhadap garis y = –x menghasilkan bayangan P’(–y, –x)

$$P(x,y)\xrightarrow{\text{garis } y=-x}P'(y,x)\,.$$

Matriks transformasinya adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.



- Matriks refleksi terhadap garis $y = x + k$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

- Matriks refleksi terhadap $y = -x + k$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

- Refleksi terhadap garis $x = h$

  $$P(x,y)\xrightarrow{x=h}P'(2h-x,h)$$

- Refleksi terhadap garis $y = k$

  $$P(x,y)\xrightarrow{y=k}P'(x,2k-y)$$

- Refleksi terhadap garis $x = h$ lalu $y = k$

  $$P(x,y)\xrightarrow{x=h,y=k}P'(2h-x,2k-y)\,.$$

- Pencerminan terhadap dua garis yang saling berpotongan

  Pencerminan terhadap dua garis yang berpotongan misal garis $y_1 = m_1x + c_1$ dan $y_2 = m_2x + c_2$ akan menghasilkan rotasi dengan:

a. Pusat di titik potong dua garis
b. Besar sudut rotasi sama dengan dua kali lipat sudut antara kedua garis
c. Arah rotasi sama dengan arah dari garis pertama ke garis kedua

Jika α sudut yang dibentuk antara garis $y_1 = m_1x + c_1$ dan $y_2 = m_2x + c_2$, maka:

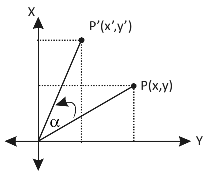
$$\tan\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

C. Rotasi

Rotasi atau biasa disebut dengan perputaran pada bidang geometri ditentukan oleh titik pusat, besar sudut, dan arah sudut rotasi.

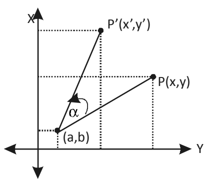
Suatu rotasi dikatakan memiliki **arah positif** jika rotasi itu **berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam** dan rotasi dikatakan memiliki **arah negatif** jika rotasi itu **searah dengan arah putaran jarum jam**.

- Rotasi dengan pusat (0,0) sebesar α.



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Rotasi dengan pusat (a,b) sebesar α



$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

D. Dilatasi

Dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bangun, tetapi tidak mengubah bentuk bangunan yang bersangkutan.

- Dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor dilatasi (faktor skala).
- Matriks transformasi dilatasi dengan faktor skala k adalah:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

- Dilatasi dengan pusat (0,0) dengan faktor skala k

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Dilatasi dengan pusat (a,b) dengan faktor skala k

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

E. Komposisi Transformasi

Jika transformasi T_1 bersesuaian dengan matriks M_1 dan transformasi T_2 bersesuaian dengan matriks M_2, maka transformasi T_1 lalu transformasi T_2 ditulis $T_2 \circ T_1$ bersesuaian dengan matriks $M_2 \cdot M_1$.

Soal dan Pembahasan

1. Hasil bayangan dari titik P(5,3) oleh translasi $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah ....
   (A) (1,0) (D) (11,6)
   (B) (2,1) (E) (11,9)
   (C) (-1,6)

   Pembahasan: Kunci (D)

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   Jadi, bayangan P'(11,6).

2. **(UNAS 2007)**
   Garis yang persamaannya $x - 2y + 3 = 0$ ditransformasikan dengan transformasi yang berkaitan dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Persamaan bayangan garis itu adalah ...
   (A) $3x + 2y - 3 = 0$ (D) $-x + y + 3 = 0$
   (B) $3x - 2y - 2 = 0$ (E) $x - y + 3 = 0$
   (C) $3x + 2y + 3 = 0$

   Pembahasan: Kunci (D)

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x' + 3y' \\ -2x' + y' \end{pmatrix}$$

Diperoleh bayangannya menjadi:

$$\left(-5x'+3y'\right)-2\left(-2x'+y'\right)+3=0$$

$$\Leftrightarrow -5x'+3y'+4x'-2y'+3=0$$

$$\Leftrightarrow -x'+y'+3=0$$

Jadi, persamaan bayangan garis tersebut adalah $-x+y+3=0$

3. Bayangan garis $3x + 4y - 5 = 0$ oleh dilatasi $\left[O(0,0),4\right]$ adalah...
   (A) $3x + 4y - 5 = 0$
   (B) $2x - 3y + 15 = 0$
   (C) $3x + 4y - 20 = 0$
   (D) $3x - 2y + 5 = 0$
   (E) $3x + 2y - 20 = 0$

   Pembahasan: Kunci (C)

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$$

   Diperoleh $x = \frac{1}{4}x'$ dan $y = \frac{1}{4}y'$.

   Sehingga bayangannya:

   $$3\left(\frac{1}{4}x'\right)+4\left(\frac{1}{4}y'\right)-5=0$$

   $$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x'+y'-5=0$$

   $$\Leftrightarrow 3x'+4y'-20=0$$

4. Bayangan dari P(3,2) jika dicerminkan terhadap garis $y=\frac{1}{3}\sqrt{3}x$ adalah....

(A) $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}-1\right)$

(B) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}-1\right)$

(C) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right)$

(D) $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

(E) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

Pembahasan: Kunci (A)

$$m=\frac{1}{3}\sqrt{3}=\tan 30^\circ \Rightarrow \alpha=30^\circ$$

Besar sudut rotasi sama dengan dua kali lipat sudut antara kedua garis, berarti sudut rotasi adalah 2 . 30° = 60°

Sehingga matriks transformasinya:

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

5. **(UNAS 2009)**
Diketahui translasi $T_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$ Titik-titik A´ dan B´ berturut-turut adalah bayangan titik-titik A dan B oleh komposisi transformasi $T_1 \circ T_2$. Jika A(–1, 2), A´(1,11), dan B´(12,13), maka koordinat titik B adalah ...
(A) (9, 4) (D) (10, -4)
(B) (10, 4) (E) (14, -4)
(C) (14, 4)
Pembahasan: Kunci (B)
$T_1 \circ T_2$ artinya
T_2 dilanjutkan $T_1 = \begin{pmatrix} a+3 \\ 2+b \end{pmatrix}$.

A(-1, 2) ditranslasi $\begin{pmatrix} a+3 \\ 2+b \end{pmatrix}$ diperoleh bayangan A´(1,11), berarti:

$$\begin{pmatrix} -1+a+3 \\ 2+2+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{diperoleh} \quad \begin{matrix} a=-1 \\ b=7 \end{matrix}$$

B(x,y) ditranslasi $\begin{pmatrix} a+3 \\ 2+b \end{pmatrix}$ diperoleh bayangan B´(12,13) , berarti:

$$\begin{pmatrix} x+a+3 \\ y+2+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-1+3 \\ y+2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. **(UNAS 2009)**
Bayangan garis 3x + 4y = 6 oleh tranformasi berturut-turut pencerminan terhadap sumbu X, dilanjutkan rotasi dengan pusat O (0, 0) sejauh 90^o adalah ...
(A) 4x + 3y = 31
(B) 4x + 3y = 6
(C) 4x + 3y = -19
(D) 3x + 4y = 18
(E) 3x + 4y = 6

Pembahasan: Kunci (B)
Matriks transformasi pencerminan terhadap sumbu X:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Matriks transformasi rotasi dengan pusat O (0, 0) sejauh 90^o
$$\begin{pmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Matriks komposisi transformasi di atas:
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Selanjutnya,
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -y' \\ -x' \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix}$$

Diperoleh bayangannya menjadi 3y’ + 4x’ = 6
Jadi, persamaan bayangan garis tersebut adalah
4x + 3y = 6.

7. **(UNAS 2008)**
Persamaan bayangan garis
4y + 3x – 2 = 0 oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dilanjutkan matriks $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ adalah ...
(A)8x + 7y – 4 = 0
(B)8x + 7y – 2 = 0
(C)x – 2y – 2 = 0
(D) x + 2y – 2 = 0
(E) 5x + 2y – 2 = 0
Pembahasan: Kunci (C)
Matriks transformasi komposisi:

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2x' \\ x'+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \dfrac{-x'-y'}{2} \end{pmatrix}$$

Diperoleh bayangannya menjadi:

$$4\left(\frac{-x'-y'}{2}\right)+3(x')-2=0$$

$\Leftrightarrow$ -2x' – 2y' + 3x' – 2 = 0

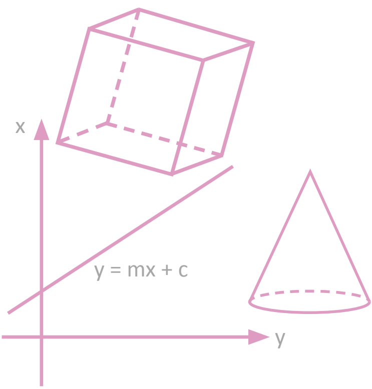
$\Leftrightarrow$ x' – 2y' – 2 = 0

Jadi, persamaan bayangan garis tersebut adalah x – 2y – 2 = 0

Bab 21

Barisan dan Deret

Strategi Kebut Semalam
Matematika **SMA**



- Barisan adalah himpunan bilangan yang diurutkan menurut suatu aturan tertentu. Setiap bilangan dalam barisan disebut suku-suku barisan. Barisan dapat dituliskan dengan:

$$U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$$

- Deret adalah jumlah yang diperoleh dari penjumlahan suku-suku suatu barisan. Deret dapat dituliskan dengan:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

A. Barisan dan Deret Aritmetika

Barisan aritmetika adalah barisan yang mempunyai selisih di antara dua suku yang berurutan sama.

Contoh:

2, 6, 10, 14, ...

3, 6, 9, 12, ...

Diketahui U_1, U_2, ..., U_n merupakan suku-suku pada barisan aritmetika.

- Suku pertama = U_1 = a
- Beda $\Rightarrow$ $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1}$

Suku ke-n:

$$U_n = a + (n-1)b$$

Jumlah n suku pertama (S_n)

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Catatan:

Jika di antara 2 suku yang berurutan pada barisan aritmetika dengan beda b disisipkan k bilangan, maka beda dari barisan yang terjadi setelah disisipkan = $\frac{b}{k+1}$.

B. Barisan dan Deret Geometri

Barisan geometri adalah barisan dengan rasio antara 2 suku yang berurutan adalah sama.

Contoh:

1, 2, 4, 8, 16 32, ...

1, 3, 9, 27, ...

Diketahui U_1, U_2, ..., U_n merupakan suku-suku pada barisan geometri.

- Suku pertama = U_1 = a
- Rasio $\Rightarrow r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = ... = \frac{U_n}{U_{n-1}}$

Suku ke-n

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Jumlah n suku pertama (S_n)

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \text{ atau } S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

Catatan:

Jika di antara 2 suku yang berurutan pada deret geometri disisipkan k bilangan, sehingga membentuk deret geometri yang baru, maka rasio dari deret yang terbentuk $=\sqrt[k+1]{r}$.

C. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga adalah deret yang banyak suku-sukunya tak terhingga.

- Deret geometri mempunyai jumlah/limit/ konvergen jika $-1<r<1 \Leftrightarrow |r|<1$
- Sedangkan jika rasionya $r \geq 1$ atau $r \leq -1$, maka deret geometri tersebut dikatakan deret divergen.
- Rumus jumlah deret geometri tak hingga dengan $-1<r<1$:

$$S_{\infty}=\frac{a}{1-r}$$

- Jumlah tak hingga dari suku-suku ganjil:

$$S_{ganjil}=\frac{a}{1-r^2}$$

- Jumlah tak hingga dari suku-suku genap:

$$S_{ganjil}=\frac{ar}{1-r^2}$$

- Rasio deret geometri tak hingga:

$$r=\frac{S_{genap}}{S_{ganjil}}$$

Soal dan Pembahasan

1. **(UNAS 2008)**
   Seutas tali dipotong menjadi 52 bagian yang masing-masing potongannya membentuk suatu deret aritmetika. Bila potongan tali terpendek adalah 3 cm dan yang terpanjang adalah 105 cm, maka panjang tali semula adalah …
   (A) 5.460 cm
   (B) 2.808 cm
   (C) 2.730 cm
   (D) 1.352 cm
   (E) 808 cm

   Pembahasan: Kunci (B)
   Misalkan a = 3 dan U_{52} = 105.
   $$\begin{aligned} &U_{52} = 105 \\ &\Leftrightarrow a + 51b = 105 \\ &\Leftrightarrow 3 + 51b = 105 \\ &\Leftrightarrow 51b = 102 \\ &\Leftrightarrow b = 2 \end{aligned}$$

   Dengan demikian diperoleh,
   $$\begin{aligned} S_{52} &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{52}{2}\left(2.3 + 51.2\right) \\ &= 26\left(6 + 102\right) = 2.808 \end{aligned}$$
   Jadi, panjang tali semula adalah 2.808 meter.

2. **(UNAS 2007)**
   Sebuah mobil dibeli dengan harga Rp80.000.000,00. Setiap tahun nilai jualnya menjadi $\frac{3}{4}$ dari harga sebelumnya. Berapa nilai

jual setelah dipakai 3 tahun?
(A) Rp20.000.000,00
(B) Rp25.312.500,00
(C) Rp33.750.000,00
(D) Rp35.000.000,00
(E) Rp45.000.000,00

Pembahasan: Kunci (C)

Soal ini merupakan masalah deret geometri dengan a = 80.000.000 dan rasio $r = \frac{3}{4}$.

Nilai jual setelah dipakai 3 tahun artinya sama dengan nilai jual pada tahun ke-4 (U_4).

$$U_4 = ar^3 = 80.0000\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 33.750.000$$

Jadi, nilai jual setelah dipakai 3 tahun adalah Rp33.750.000,00.

3. **(SNMPTN 2009)**

Jumlah 101 bilangan genap berurutan adalah 13130. Jumlah bilangan yang pertama dari bilangan-bilangan genap itu adalah ...

(A)96 (C)108 (E)120
(B)102 (D)114

Pembahasan: Kunci (A)

Bilangan genap: 2, 4, 6, 8, 10, ...

Untuk bilangan genap merupakan deret aritmetika dengan beda 2

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$\Leftrightarrow S_{101} = \frac{101}{2}\left(2a + \left(101-1\right).2\right)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{13130} = \frac{\cancel{101}}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}a + \left(101-1\right).\cancel{2}\right)$$

$\Leftrightarrow 130 = a + 100$

$\Leftrightarrow a = 30$

Jadi, 30 + 32 + 34 = 96.

4. **(SNMPTN 2008)**

Jika $2p + q$, $6p + q$, dan $14p + q$ adalah tiga suku deret geometri yang berurutan, maka rasio deretnya adalah...

(A) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (E) 3

(B) $\frac{1}{3}$ (D) 2

Pembahasan: Kunci (D)

Rasio pada deret geometri adalah perbandingan antara suku-suku yang saling berdekatan.

$$r = \frac{6p-q}{2p+q} = \frac{14p+q}{6p-q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6p-q}{2p+q} = \frac{14p+q}{6p-q}$$

$\Leftrightarrow (6p - q)^2 = (14p + q)(2p + q)$

$\Leftrightarrow 36p^2 - 12pq - q^2 = 28p^2 + 16pq + q^2$

$\Leftrightarrow 8p^2 - 4pq = 0$

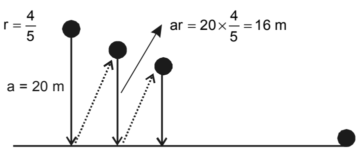
$\Leftrightarrow p(2p - q) = 0$

$p = 0$ atau $p = \frac{1}{2}q$

Selanjutnya, diperoleh

$$r = \frac{6p-q}{2p+q} = \frac{6(\frac{1}{2}q)-q}{2(\frac{1}{2}q)+q} = \frac{4q}{2q} = 2$$

5. **(UNAS 2009)**
Sebuah bola jatuh dari ketinggian 20 m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{4}{5}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus-menerus. Panjang seluruh lintasan bola adalah ...
(A)64 m (C)128 m (E)196 m
(B)84 m (D)180 m
Pembahasan: Kunci (D)
Dari soal diketahui: a = 20 m; r = $\frac{4}{5}$



Lintasan bola turun:

$$S_{turun} = \frac{a}{1-r} = \frac{20}{1-\frac{4}{5}} = \frac{20}{\frac{1}{5}} = 100 \text{ m}$$

Lintasan bola naik:

$$S_{naik} = \frac{ar}{1-r} = \frac{20.\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{16}{\frac{1}{5}} = 80 \text{ m}$$

Total panjang lintasan
= Lintasan bola turun + Lintasan bola naik
= 100 m + 80 m = 180 m

6. **(SNMPTN 2009)**
Berdasarkan penelitian diketahui bahwa populasi hewan A berkurang menjadi setengahnya tiap 10 tahun. Pada tahun 2000 populasinya tinggal 1 juta. Banyak populasi hewan A pada tahun 1960 sekitar...
(A) 64 juta (C) 16 juta (E) 4 juta
(B) 32 juta (D) 8 juta
Pembahasan: Kunci (C)
Dari soal diketahui populasi hewan A menjadi setengahnya setiap 10 tahun. Berarti pada tahun ke-n populasinya menjadi:
$$M = Mo\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ dengan } n = \frac{t}{T_{1/2}}$$
dengan:
t = lamanya penyusutan (peluruhan)
M = populasi hewan
Mo = populasi awal (saat ini)
n = waktu (tahun)
$\frac{t}{T_{1/2}}$ = waktu paruh = 10 tahun
Diketahui pada tahun 2000 populasinya tinggal 1 juta, maka populasi hewan A pada tahun 1960.
$$n = \frac{1960 - 2000}{10} = -4$$

Jadi,

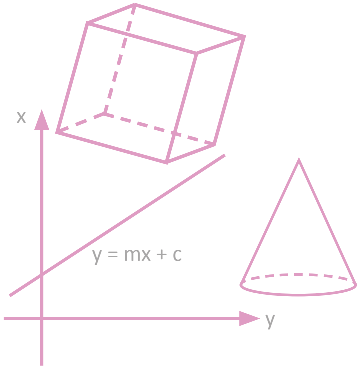
$M = Mo\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 1 \text{ juta}.\ (2^{-1})^{-4}$

$= 1 \text{ juta}.\ 2^{4} = 16 \text{ juta}$

Bab 22

Persamaan Eksponen dan Logaritma

Strategi Kebut Semalam Matematika SMA



A. Eksponen

Jika a adalah suatu bilangan real dan n suatu bilangan bulat positif (bilangan asli), maka

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n} \cdot$$

dengan:

a = bilangan pokok (basis)

n = pangkat atau eksponen

1. Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen didefinisikan:

$$f : x \to ka^x \text{ atau } y = f(x) = ka^x$$

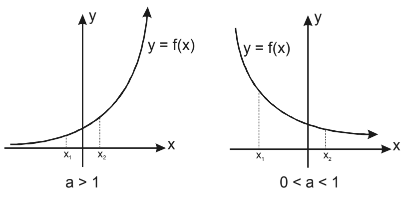
dengan:

x: adalah variabel/peubah bebas.

a: adalah bilangan pokok atau basis eksponen dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

k: adalah konstanta bilangan real sembarang

Secara umum grafik fungsi eksponen adalah:



2. Persamaan Eksponen

a. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$

b. $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$

c. $f\left(x\right)^{g(x)} = f\left(x\right)^{h(x)}$ maka:

- g(x) = h(x)
- f(x) = 1

- f(x) = –1, dengan syarat g(x) dan h(x) sama-sama genap/ganjil
- f(x) = 0, dengan syarat g(x) dan h(x) sama-sama positif

3. Pertidaksamaan Eksponen

Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka berlaku:

- f(x) > g(x), untuk a > 1
- f(x) < g(x), untuk 0 < a < 1

B. Logaritma

$^{a}\log b = c \Leftrightarrow a^{c} = b$

di mana:

a : bilangan pokok; 0 < a < 1 atau a > 1

b : numerus; b > 0

c : hasil logaritma

1. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah fungsi yang peubah (variabel) bebasnya berupa bentuk logaritma. Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen.

Fungsi logaritma f dengan bilangan pokok atau basis a dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f : x \to {}^{a}\log x \text{ atau } y = f(x) = {}^{a}\log x$$

dengan:

x : variabel/peubah bebas.

a : bilangan pokok (basis logaritma), a > 0 dan $a \neq 1$.

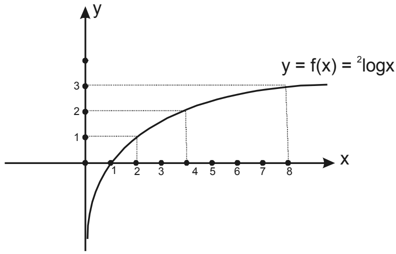
Contoh:

Diketahui fungsi eksponen f(x) = $^{2}\log x$.

Gambarlah grafik fungsi eksponen tersebut!

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
y = f(x)	–3	–2	–1	0	1	2	3

Grafik:



2. Persamaan Logaritma

- Jika $^{a}\log\ f(x) = b$, maka f(x) = a^b.

  Syarat: a > 0 dan $a \neq 1$.
- Jika $^{a}\log\ f(x) = {}^{a}\log\ g(x)$, maka f(x) = g(x).

  Syarat: a > 0 dan $a \neq 1$.

3. Pertidaksamaan Logaritma

- Jika $^{a}\log\ f(x) \leq b$, maka berlaku:

  Syarat basis:

  1. Untuk 0 < a < 1: $f(x) \geq a^b$
  2. Untuk a > 1: $f(x) \leq a^b$

  Syarat numerus: f(x) > 0
- Jika $^{a}\log\ f(x) \geq b$, maka berlaku:

  Syarat basis:

  1. Untuk 0 < a < 1: $f(x) \leq a^b$
  2. Untuk a > 1: $f(x) \geq a^b$

Syarat numerus: $f(x) > 0$

- Jika ${}^a\log f(x) \le {}^a\log g(x)$, maka berlaku:
  Syarat basis:
  1. Untuk $0 < a < 1$: $f(x) \ge g(x)$
  2. Untuk $a > 1$: $f(x) \le g(x)$

  Syarat numerus:
  1. $f(x) > 0$
  2. $g(x) > 0$
- Jika ${}^a\log f(x) \ge {}^a\log g(x)$, maka berlaku:
  Syarat basis:
  1. Untuk $0 < a < 1$: $f(x) \le g(x)$
  2. Untuk $a > 1$: $f(x) \ge g(x)$

  Syarat numerus:
  1. $f(x) > 0$
  2. $g(x) > 0$

Soal dan Pembahasan

1. **(UM UGM 2009)**

Jika x_1 dan x_2 adalah penyelesaian persamaan

$\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-3}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{1-x}=\frac{3}{2}$, maka $\left(x_1-x_2\right)^2=\ ...$

(A) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{41}{4}$ (E) 25

(B) $\frac{25}{4}$ (D) $\frac{25}{2}$

Pembahasan: Kunci (B)

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-3}\left(\frac{8}{27}\right)^{1-x}=\frac{3}{2}$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{x^2-3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{1-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-6}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-6+3-3x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$2x^2-3x-3=-1$$

$$2x^2-3x-2=0$$

$$x_1+x_2=\frac{3}{2}\ \text{ dan }\ x_1.x_2=-1$$

Jadi,

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2 &= (x_1{}^2+x_2{}^2)-2x_1.x_2\\ &= \left((x_1+x_2)^2-2x_1.x_2\right)-2x_1.x_2\\ &= (x_1+x_2)^2-4x_1.x_2\\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2-4(-1)=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

2. **(UNAS 2008)**

   Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen $9^{2x-4}\geq\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4}$ adalah ...

   (A) $\left\{x \mid -2\leq x\leq\frac{10}{3}\right\}$

   (B) $\left\{x \mid -\frac{10}{3}\leq x\leq 2\right\}$

   (C) $\left\{x \mid x\leq-\frac{10}{3}\text{ atau } x\geq 2\right\}$

   (D) $\left\{x \mid x\leq -2\text{ atau } x\geq\frac{10}{3}\right\}$

   (E) $\left\{x \mid -\frac{10}{3}\leq x\leq -2\right\}$

   Pembahasan: Kunci (C)

   Bentuk pertidaksamaan eksponen tersebut dapat diselesaikan dengan cara:

$$9^{2x-4}\geq\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4}$$

$$\left(3^2\right)^{2x-4}\geq\left(3^{-3}\right)^{x^2-4}$$

$$3^{4x-8} \geq 3^{-3x^2+12}$$

$$4x - 8 \geq -3x^2 + 12$$

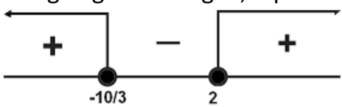
$$3x^2 + 4x - 20 \geq 0$$

$$(3x+10)(x-2) \geq 0$$

Diperoleh pembuat nol fungsi:

$x = -\dfrac{10}{3}$ atau $x = 2$

Dengan garis bilangan, diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah

$$\left\{ x \middle| x \leq -\frac{10}{3} \text{ atau } x \geq 2 \right\}.$$

3. **(SNMPTN 2008)**
Nilai x yang memenuhi persamaan $\dfrac{\sqrt[3]{4^{5-x}}}{8} = \dfrac{1}{2^{2x+1}}$ adalah ....

(A)-4 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (E) $\dfrac{1}{4}$

(B) -1 (D) 2

Pembahasan: Kunci (B)

$$\frac{\sqrt[3]{4^{5-x}}}{8} = \frac{1}{2^{2x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2\frac{(5-x)}{3}}}{2^3} = 2^{-(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{10-2x}{3}} . 2^3 = 2^{-(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\left(\frac{10-2x}{3}\right)-3} = 2^{-(2x+1)}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{10-2x}{3} = -x+2$

$\Leftrightarrow 10 - 2x = -6x + 6$

$\Leftrightarrow 4x = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

Jadi nilai x yang memenuhi adalah -1.

4. **(SNMPTN 2008)**

Adi selalu membelanjakan $\frac{1}{3}$ bagian dari uang yang masih dimilikinya dan dia tidak mempunyai penghasilan lagi. Jika pada saat belanja terakhirnya sisanya kurang dari $\frac{32}{243}$ uang semula, maka Adi paling sedikit sudah membelanjakan uangnya ....

(A) 4 kali
(B) 5 kali
(C) 7 kali
(D) 10 kali
(E) 14 kali

Pembahasan: Kunci (B)

Misalkan uang Adi sebesar x. karena ia membelanjakan uangnya selalu $\frac{1}{3}$ dari uang yang masih dimilikinya, maka sisa uang Adi setiap belanja selalu $\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x$.

Pada belanja terakhirnya sisanya kurang dari $\frac{32}{243}$ uang semula, berarti:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x < \frac{32}{243}x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \left(\frac{2^5}{3^5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$\Leftrightarrow n > 5$

Jadi, Adi paling sedikit telah membelanjakan uangnya sebanyak 5 kali.

5. **(UNAS 2009)**

Diketahui ${}^{64}\log\sqrt{16^{x-4}} = \frac{1}{2}$. Nilai x yang memenuhi persamaan itu adalah ...

(A) $-5\frac{1}{2}$ (C) 4 (E) $9\frac{1}{2}$

(B) $-4\frac{3}{4}$ (D) $5\frac{1}{2}$

Pembahasan: Kunci (D)

$${}^{64}\log\sqrt{16^{x-4}} = \frac{1}{2}$$

$${}^{64}\log\sqrt{16^{x-4}} = {}^{64}\log\sqrt{64}$$

$$\sqrt{16^{x-4}} = \sqrt{64}$$

$$16^{x-4} = 64$$

$$2^{4(x-4)} = 2^6$$

$$4(x-4) = 6$$

$$x - 4 = \frac{6}{4}$$

$$x = \frac{6}{4} + 4 = 5\frac{1}{2}$$

6. **(SPMB 2007)**

   Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan:

   $(5 - 2 \log x)\log x = \log 1000$

   Maka $x_1^2 + x_2^2 = ...$

   (A)0 (C)100 (E)1.100

   (B)10 (D)1.000

   Pembahasan: Kunci (E)

   Persamaan logaritma tersebut dapat diselesaikan dengan cara:

   $(5 - 2 \log x)\log x = \log 1000$

   $\Leftrightarrow (5 - 2 \log x)\log x = \log 10^3$

   $\Leftrightarrow 5 \log x - 2 \log^2 x = 3$

   Misalkan $p = \log x$

   $5p - 2p^2 = 3$

   $\Leftrightarrow 2p^2 - 5p + 3 = 0$

   $\Leftrightarrow 2p^2 - 2p - 3p + 3 = 0$

   $\Leftrightarrow (2p - 3)(p - 1) = 0$

   $\Leftrightarrow 2p - 3 = 0$ atau $p - 1 = 0$

   $\Leftrightarrow p = \frac{3}{2}$ atau $p = 1$

   Untuk $p = \frac{3}{2}$, maka $\log x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 10^{\frac{3}{2}}$

   Untuk $p = 1$, maka $\log x = 1 \Leftrightarrow x_2 = 10$

   Sehingga diperoleh:

   $x_1^2 + x_2^2 = (10^{\frac{3}{2}})^2 + (10)^2 = 10^3 + 100 = 1.100$

7. **(UNAS 2008)**
Akar-akar persamaan ${}^2\log^2 x - 6.{}^2\log x + 8 = {}^2\log 1$ adalah x_1 dan x_2. Nilai $x_1 + x_2$ = ...
(A)6 (C) 10 (E) 20
(B) 8 (D) 12
Pembahasan: Kunci (E)

$${}^2\log^2 x - 6 \cdot {}^2\log x + 8 = {}^2\log 1$$
$$\Leftrightarrow {}^2\log^2 x - 6 \cdot {}^2\log x + 8 = 0$$

Misal $y = {}^2\log x$, maka diperoleh:

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$
$$(y-4)(y-2) = 0$$

y = 4 atau y = 2
Artinya,

${}^2\log x = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2^4 = 16$ atau
${}^2\log x = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2^2 = 4$.
Jadi, $x_1 + x_2$ = 16 + 4 = 20.

8. **(UM UGM 2008)**
Nilai semua x yang memenuhi ${}^a\log^2 x \geq 8 + 2\,{}^a\log x$ dengan bilangan a > 1, adalah ...
(A) $a^2 \leq x \leq a^4$
(B) $x \leq a^2$ atau $x \geq a^4$
(C) $x \leq \frac{1}{a^4}$ atau $x \geq a^2$
(D) $x \leq \frac{1}{a^2}$ atau $x \geq a^4$
(E) $x \leq -2$ atau $x \geq 4$

Pembahasan: Kunci (D)

$$^{a}\log^{2} x \geq 8 + 2\,^{a}\log x$$

$$\Leftrightarrow\, ^{a}\log^{2} x - 2\,^{a}\log x - 8 \geq 0$$

Misal: $^{a}\log x = p$

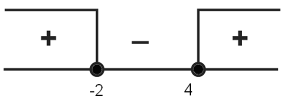
$$\Leftrightarrow p^{2} - 2p - 8 \geq 0$$

Dicek pembuat nol:

$(p - 4)(p + 2) = 0$

$p = 4$ atau $p = -2$

Menggunakan garis bilangan diperoleh:



Diperoleh hasil

$$p \leq -2 \text{ dan } 4 \leq p$$

$$\Leftrightarrow\, ^{a}\log x \leq -2 \text{ dan } 4 \leq\, ^{a}\log x$$

Karena $a > 1$, maka

$$x \leq a^{-2} \text{ atau } a^{4} \leq x$$

$$\Leftrightarrow\; x \leq \frac{1}{a^{2}} \text{ atau } x \geq a^{4}$$